[1]
Berechnen Sie

$$8a \cdot \frac{3/2}{4/3} + \sqrt[3]{a^3} \qquad \text{für} \quad a > 0$$

$$8a \cdot \frac{3/2}{4/3} + \sqrt[3]{a^3} = \boxed{}$$

---

[2] Die folgenden Aussagen befassen sich mit *quadratischen Gleichungen*.

a) Die Gleichung $x^2 + a = 0$ hat für alle $a \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$.

b) Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei verschiedene Lösungen.

c) Die quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$ hat für $p \neq 0$ immer zwei verschiedene Lösungen.

d) Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann keine Lösung, wenn $\frac{p^2}{4} - q \leq 0$.

e) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann keine Lösung, wenn die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ keine Nullstellen hat.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[3]
Berechnen Sie die Doppelsumme

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1) = \boxed{}$$

---

[4]
Betrachten Sie die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie $f(5)$, wenn $f(3) = 8$ gilt.

$$f(5) = \boxed{}$$

---

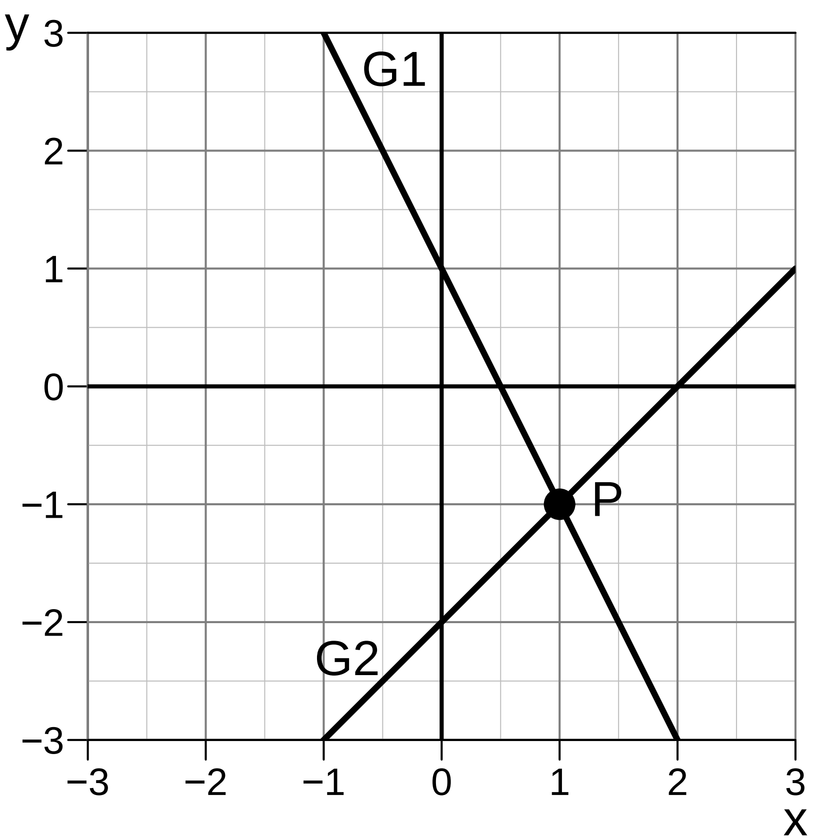
[5]
Für welche x gilt

$$(x-2)(5-x) > 0\ ?$$

$$(x-2)(5-x) > 0 \iff \boxed{}$$

---

[6]   Die folgenden Aussagen befassen sich mit den in der folgenden Abbildung dargestellten *Geraden*.



a) Die Gleichung der Geraden $G2$ ist $y = -2x + 1$.

b) Die Gleichung der Geraden $G2$ ist durch den y-Achsenabschnitt -2 und den x-Achsenabschnitt 2 eindeutig bestimmt.

c) Der Punkt P erfüllt sowohl die Geradengleichung von $G1$ als auch von $G2$.

d) Die Gerade $G1$ hat die Steigung 2.

e) Liegt (x, y) unterhalb der Geraden $G1$, so gilt $y < -2x + 1$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[7]
Für welches $x > 0$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\ln(a^2x^3) - 2\ln(ax) = \ln 2$$

Dabei ist $a > 0$ und $x > 0$.

$x = \boxed{}$

---

[8]
Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{8xe^x}{\ln(1+4x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8xe^x}{\ln(1+4x)} = \boxed{}$$

---

[9]
Bestimmen Sie die zu

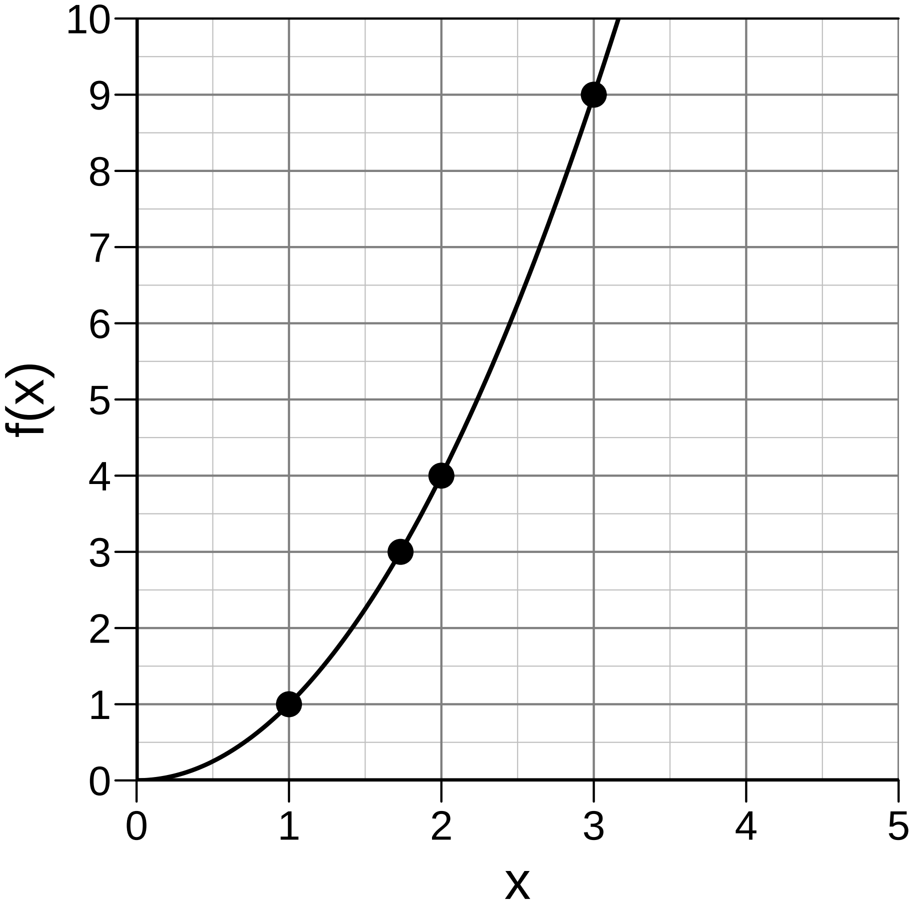
$$y = f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} \qquad x < 0$$

inverse Funktion $x = g(y)$.

$g(y) = \boxed{}$

---

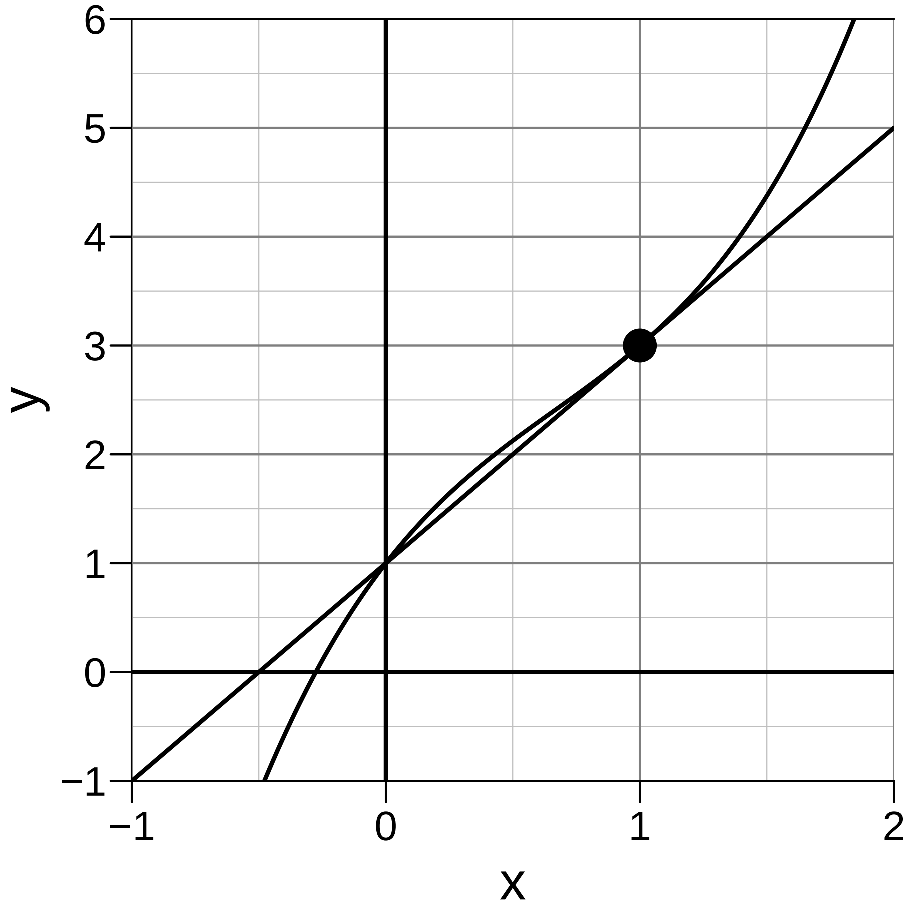
[10]
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer streng monotonen und damit invertierbaren Funktion f. Die Inverse sei mit f^{-1} bezeichnet.



Bestimmen Sie: $f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big)$

$$f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big) = \boxed{}$$

[11]
Bestimmen Sie anhand der folgenden Abbildung die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion im Punkt $(1, 3)$.
Geben Sie die Gleichung der Tangente in der Form $y = ax + b$ an.



$y = ax + b =$

[12]
Betrachten Sie die Funktion

$$y = f(x) = 4x^2$$

Bilden Sie den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

und **vereinfachen** Sie diesen so weit wie möglich.

Vereinfacht: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ $\boxed{}$

Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate von f, wenn x von 3 um $\Delta x = 2$ auf 5 geändert wird.

Durschnittliche Änderungsrate: $\boxed{}$

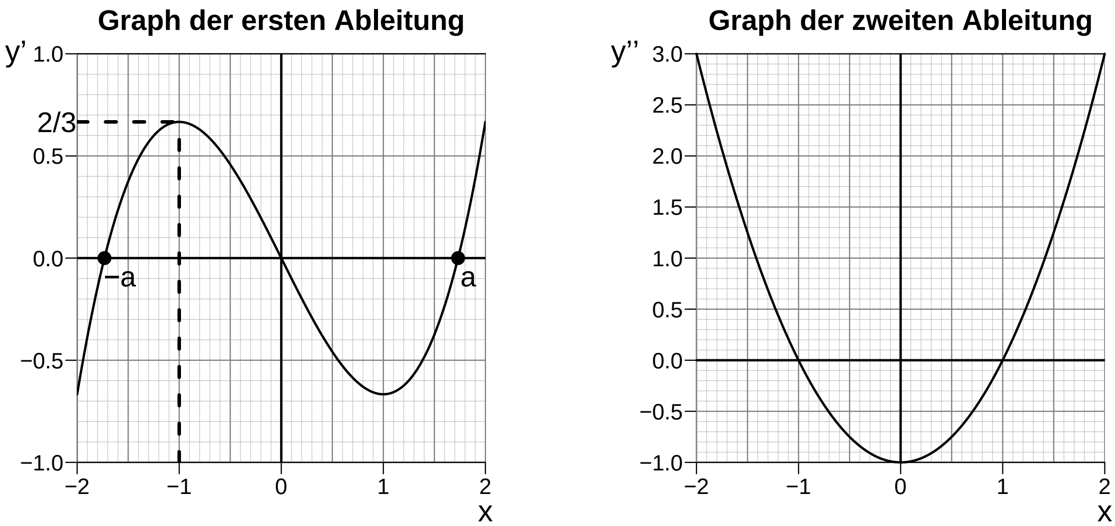
---

[13]
Verwenden Sie die quadratische Approximation um $x = 0$ zur Berechnung von $e^{0.2}$.

$e^{0.2} \approx$ $\boxed{}$

---

[14] Die folgenden Aussagen befassen sich mit den in der folgenden Abbildung dargestellten *Ableitungen erster und zweiter Ordnung* einer Funktion f, die auf $[-2, 2]$ definiert ist.



a) Die Funktion f ist konvex auf $[-1, 1]$.

b) Die Funktion f ist für $x \in [-a, 0]$ monoton wachsend.

c) Die Funktion f ist für $x \in (0, a)$ streng monoton fallend.

d) Wenn $f(-1) = 3$, so ist die relative Änderungsrate von f an der Stelle -1 gleich $2/9$.

e) Da $f''(x) \geq 0$ für $x \in [-2, -1]$, ist f monoton steigend im Intervall $[-2, -1]$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[15]
Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx = \boxed{}$$

[16]
Bestimmen Sie die Elastizität der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} + x^{3/2} \cdot x^3 \cdot x^{-2} \qquad \text{für} \quad x > 0$$

$\mathrm{El}_x f(x) =$ $\boxed{}$

---

[17]
Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$$

hat genau eine lokale Extremstelle x^*. Bestimmen Sie diese.

Hinweis: Die erste Ableitung $f'(x)$ hat genau zwei Nullstellen, die beide **ganzzahlig** sind.

$x^* =$ $\boxed{}$

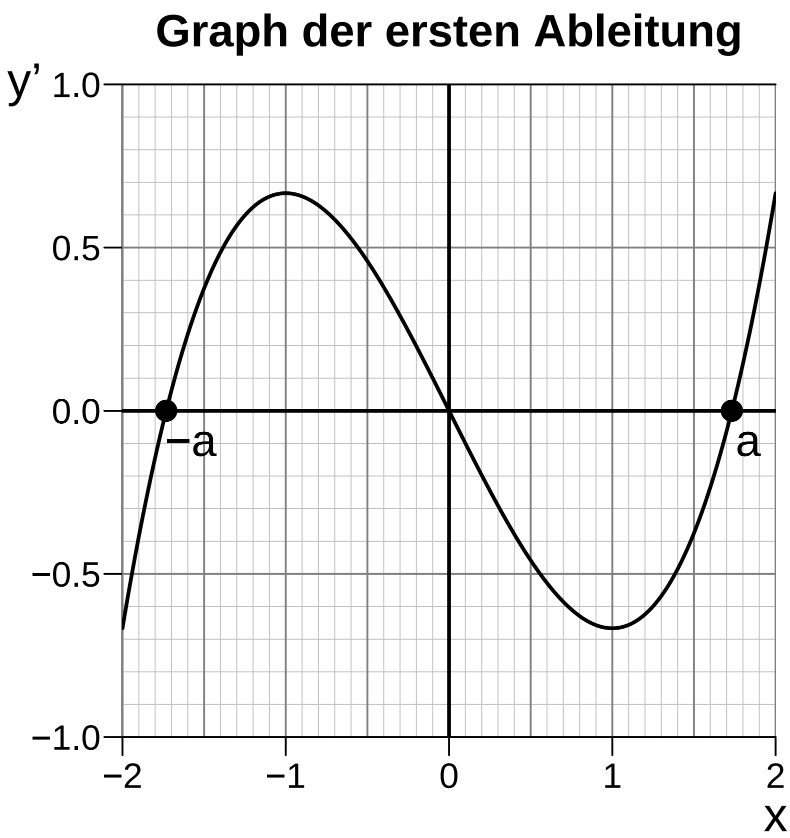
---

[18]
Bestimmen Sie $\displaystyle\int 2^x \, dx$.

$\displaystyle\int 2^x \, dx =$ $\boxed{}$

---

[19] Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Optimierung einer univariaten Funktion* $y = f(x)$, deren Ableitung in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Die Funktion sei definiert auf $[-2, 2]$.



a) Nach dem Extremwertsatz besitzt die Funktion f einen Maximumpunkt und einen Minimumpunkt in $[-2, 2]$.

b) Kandidaten für globale Extrempunkte sind $-2, -a, 0, a$ und 2.

c) Das globale Maximum kann nicht in $-a$ und auch nicht in a angenommen werden.

d) An der Stelle 0 hat die Funktion ein lokales Minimum.

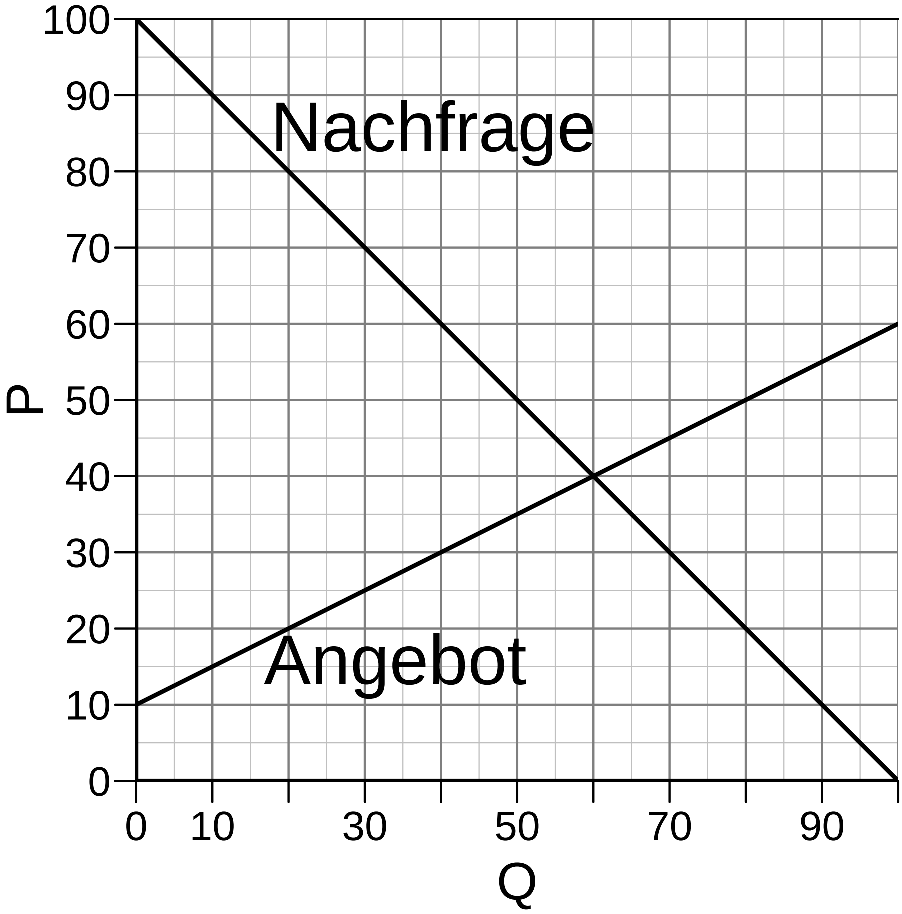
e) Das globale Minimum kann nur in einem der beiden Randpunkte angenommen werden.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[20]
Die folgende Abbildung zeigt eine Angebots- und Nachfragefunktion.



Schraffieren Sie in der obigen Abbildung die Produzentenrente PS.

Wie groß ist die Produzentenrente PS?

$PS =$

[21] Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *effektiven Zinsrate*.

a) Bei fester nominaler (jährlicher) Zinsrate r und gegebener Anzahl n von Zinsperioden pro Jahr ist die effektive Zinsrate eindeutig bestimmt, d.h. sie hängt nicht vom Anfangskapital ab.

b) Werden die Zinsen nur einmal pro Jahr gut geschrieben, so stimmt die effektive Zinsrate mit der nominalen (jährlichen) Zinsrate überein.

c) Je größer die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr, desto höher ist die effektive jährliche Zinsrate bei fester nominaler Zinsrate r.

d) Die effektive Zinsrate berechnet sich bei gegebener Anzahl n von Zinsperioden pro Jahr und nominaler Zinsrate r aus $R = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

e) Bei stetiger Verzinsung zur nominalen Zinsrate r ist die effektive Zinsrate $R = 1 - e^r$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[22]
Bestimmen Sie die partielle Elastizität $\mathrm{El}_x z$, wenn

$$z = f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$\mathrm{El}_x z =$ $\boxed{}$

---

[23]
Sei $f(x, y, z) = xy^2z^3 + x^2y^3z + x^3yz^2$.

Bestimmen Sie f'''_{xyz} an der Stelle $x = y = z = 1$.

$f'''_{xyz}(1, 1, 1) =$ $\boxed{}$

---

[24]
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$Q = F(K, L) = 2\sqrt{KL}$$

Für die Produktion von $c = 100$ Einheiten stehen $L_0 = 20$ Einheiten Arbeit zur Verfügung. Wie hoch muss der Kapitalinput K_0 sein, um den Auftrag von 100 Einheiten erfüllen zu können?

Mit anderen Worten: Gesucht ist K_0, so dass der Punkt $(K_0, L_0) = (K_0, 20)$ auf der Höhenlinie $F(K, L) = 100$ liegt.

$K_0 =$ $\boxed{}$

---

[25]
Durch die Gleichung

$$F(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

wird eine Höhenlinie von F definiert.
Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution R_{yx} von y für x an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$.

$R_{yx}(1, 2) =$ $\boxed{}$

---

[26] Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Differential* $dz = df$ einer Funktion $z = f(x, y)$.

a) Das Differential dz gibt die Änderung des Funktionswertes an, wenn x um dx und y um dy geändert wird.

b) Es gilt $dz \approx \Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$.

c) Das Differential beschreibt die Änderung auf der in (x, y) angelegten Tangentialebene, wenn man von (x, y) zu $(x + dx, y + dy)$ geht.

d) $dz = f_1'(x, y)\, dx + f_2'(x, y)\, dy$

e) Für das Differential des Quotienten der Funktionen f und g, d.h. für das Differential der Funktion $h = \dfrac{f}{g}$ gilt $dh = \dfrac{df}{dg}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[27]
Die Funktion

$$f(x, y) = e^{(x+y)^2}$$

hat unendliche viele stationäre Punkte.

Welche Bedingung muss ein Punkt (x, y) erfüllen, damit er ein stationärer Punkt für diese Funktion ist?

Gesucht ist eine Gleichung, die x und y erfüllen müssen. **Vereinfachen** Sie diese Gleichung so weit wie möglich.

Bedingung für einen stationären Punkt: $\boxed{}$

[28]
Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad k der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x^3y + 4x^2yz + 2xyz^2 + 6yz^3}{(x+y)^2}$$

$k =$

---

[29]
Die Funktion

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

hat genau einen Sattelpunkt (x_0, y_0). Bestimmen Sie die Koordinaten (x_0, y_0) dieses Sattelpunktes und geben Sie den Wert des Kriteriums

$$AC - B^2 = f''_{11}(x_0,y_0) \cdot f''_{22}(x_0,y_0) - (f''_{12}(x_0,y_0))^2$$

an.

$(x_0, y_0) =$ $AC - B^2 =$

---

[30]
Es sei $\boldsymbol{a} = (2c, 1, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (c, 2, 3)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} =$

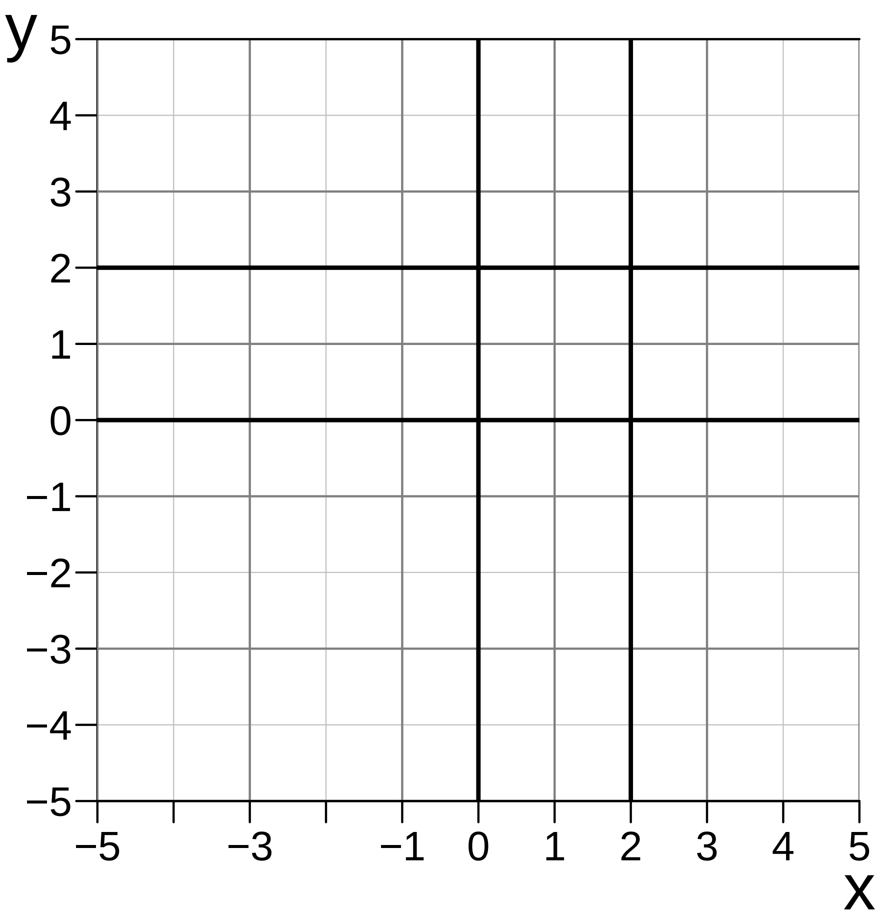
---

[31]
Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten (x^*, y^*) des Problems

$$\min\ e^{-xy} \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x + y = 2$$

$(x^*, y^*) =$ $\boxed{}$

Skizzieren Sie die Nebenbedingung in der folgenden Abbildung.



[32] Die folgenden Aussagen befassen sich mit *nichtlinearer Programmierung und den notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen*. Eine Funktion $f(x,y)$ soll unter einer Nebenbedingung $g(x,y) \leq c$ maximiert werden.

a) Die Kuhn-Tucker-Bedingungen besagen u.a., dass ein Lösungskandidat (x^*, y^*) ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion sein muss.

b) Die Lagrange-Funktion ist $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$.

c) Wenn $\lambda = 0$, ist $g(x,y) < c$.

d) Wenn $\lambda > 0$, ist $g(x,y) = c$.

e) Die komplementäre Schlupfbedingung ist äquivalent zu der einen alleinigen Gleichung $\lambda \cdot [g(x,y) - c] = 0$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[33]
Berechnen Sie das Matrizenprodukt $(\boldsymbol{AB})'$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{AB})' =$ $\boxed{}$

---

[34]
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 28 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in Treppenstufenform mit x_1, x_2 und x_3 als führenden Einträgen, d.h. die Koeeffizienten von x_1, x_2 und x_3 sollen 1 sein. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden.

Geben Sie als Lösung die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[35]
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}| =$

---

[36] Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Inversen einer Matrix.*

a) Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

b) Wenn die beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbar sind, ist auch $\boldsymbol{AB}$ invertierbar und es gilt $\boldsymbol{(AB)}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

c) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie singulär ist.

d) Die Inverse einer Matrix ist eindeutig bestimmt.

e) Die Inverse einer Matrix ist wieder invertierbar und es gilt $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Ende der Klausur