Alte Klausuraufgaben zu Kapitel 5

(SS 2002 - III 2013)

von
Prof. Dr. Fred Böker
Institut für Statistik und Ökonometrie
Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 5
37073 Göttingen

Tel. 0551-394604; email: fboeker@uni-goettingen.de

20. März 2013

[1] **SS02** Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Die Funktion f kann nur dann eine Inverse haben, wenn sie eineindeutig ist, d.h. wenn jeder Punkt aus dem Wertebereich genau ein Urbild hat. ( )

b) Wenn zwei Funktionen zu einander invers sind, so enthalten sie genau die gleichen Informationen. ( )

c) Die natürliche Exponentialfunktion e^x und ihre Inverse sind jeweils auf $(-\infty, \infty)$ definiert. ( )

d) Inverse Funktionen haben stets den gleichen Definitionsbereich. ( )

e) Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ invers zu einander sind, so sind die Graphen im (x, y)-Koordinatensystem identisch. ( )

---

[2] **SS02** Betrachten Sie die Nachfragefunktion $D = 150 - P/2$ und die Angebotsfunktion $S = 20 + 2P$.

a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis P^* und die zugehörige Menge Q^*.

$P^* =$ $\boxed{}$ $Q^* =$ $\boxed{}$

b) Nehmen Sie an, dass der Hersteller pro Einheit 2 Euro Steuer bezahlen muss. Bestimmen Sie den neuen Gleichgewichtspreis $\hat{P}$ und die zugehörige Menge $\hat{Q}$.

$\hat{P} =$ $\boxed{}$ $\hat{Q} =$ $\boxed{}$

c) Um welchen Betrag verringern sich die Gesamteinnahmen des Herstellers nach Einführung der Steuer?

$\boxed{}$

---

[3] **WDHWS03** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\ln[\ln(e^2) - 1] =$ $\boxed{}$

b) $[\ln(e)]^2 =$ $\boxed{}$

[4] **WDHWS03** Geben Sie für die folgenden Funktionen $y = f(x)$ jeweils die inverse Funktion $g(x)$ und deren Definitionsbereich D_g an. (**Hinweis:** Verwenden Sie für die Inverse wieder x als freie Variable.)

a) $y = 3x^2 + 9 \quad x \geq 0$

$g(x) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

b) $y = \ln(x-3) - 3 \quad x > 3$

$g(x) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

---

[5] **WDHWS03**
Der Punkt $(3, 2)$ liege auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1, 1)$. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises.

Gleichung des Kreises: $\boxed{}$

---

[6] **WS03** Die Funktion $f(x) = \sqrt{\ln(x) - 1}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Inverse $g(x)$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche D_f und D_g von f bzw. g und geben Sie eine Formel für die Inverse $g(x)$ an. **Hinweis:** Beachten Sie, dass Sie wieder x als freie Variable der Inversen verwenden sollen.

$D_f =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

$g(x) =$ $\boxed{}$

---

[7] **WS03, SS06K1M1** Betrachten Sie in der Ebene die drei verschiedenen Punkte $P = (2,4)$, $Q = (5,6)$ und $R = (5,y)$. Bestimmen Sie y so, dass der Punkt $R \neq Q$ den gleichen Abstand von P hat wie Q von P.

$y =$ $\boxed{}$

---

[8] **WS03** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR? Kreuzen Sie sie an.

a) Ein Kreis kann als Menge aller Punkte (x,y) aufgefasst werden, die von einem festen Punkt (a,b) einen konstanten Abstand r haben. ( )

b) Für den in a) beschriebenen Kreis gilt $\sqrt{x^2+y^2} = r$ genau dann, wenn $(a,b) = (0,0)$ ist. ( )

c) Jede Ellipse ist auch ein Kreis. ( )

d) Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind Graphen einer quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, wobei A, B und C nicht alle 0 sind. ( )

e) Der Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene ist die Summe aus dem Quadrat der x-Koordinaten und dem Quadrat der y-Koordinaten. ( )

---

[9] **SS03** Sei $f(x) = \sqrt{2x}$ und $g(x) = \frac{2}{x^2}$. Berechnen Sie $f(g(x))$ und $(g \circ f)(x)$. Geben Sie jeweils den zugehörigen (größtmöglichen) Definitionsbereich D an.

$f(g(x)) =$ $\boxed{}$ $D =$ $\boxed{}$

$(g \circ f)(x) =$ $\boxed{}$ $D =$ $\boxed{}$

---

[10] **SS03, SS06K2M1** Die Funktion $f(x)$ sei die Inverse der Funktion $g(x)$. Beide seien für alle $x \geq 0$ definiert. Bestimmen Sie $f(g(x)) + g(f(x))$ für $x = 3$.

$f(g(3)) + g(f(3)) =$ $\boxed{}$

---

[11] **SS03** Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Der Graph der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ ist ein Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit dem Radius 5. ( )

b) Der Graph der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ setzt sich aus den Graphen zweier Funktionen zusammen. ( )

c) Jede senkrechte Gerade hat höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen einer Funktion. ( )

d) Die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ ist symmetrisch zur Geraden $x = -2$. ( )

e) $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$ ( )

---

[12] **WS04, SS06K1M1** Sei $f(x) = 3x + 7$.

a) Bestimmen Sie alle Werte von x, für die $f(f(x)) = 55$ gilt.

$x =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie alle Werte von x, für die $(f(x))^2 = 64$ gilt.

$x =$ $\boxed{}$

---

[13] **WS04**

DREI der folgenden Funktionen haben **KEINE** Umkehrfunktion? Kreuzen Sie sie an.

a) $f(x) = -x^2$ für $x \in [0, \infty)$ ( )

b) $f(x) = x^3 - x$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

c) $f(x) = e^{-x}$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

d) $f(x) = e^{-x^2}$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

e) $f(x) = \ln(e^3)$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

---

[14] **WS04, SS06K2M1** Bestimmen Sie alle möglichen Werte von y, für die der Punkt $(5, y)$ auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1, 2)$ und dem Radius $r = 5$ liegt.

$y =$ $\boxed{}$

---

[15] **SS04** Die Funktion f sei für $x > 0$ definiert durch

$$y = f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Die Funktion f ist monoton wachsend und hat daher eine Inverse f^{-1}. Bestimmen Sie eine Formel für $f^{-1}(x)$. **Beachten Sie:** Als Argument der inversen Funktion soll wieder x verwendet werden.

$f^{-1}(x) =$ $\boxed{}$

---

[16] **SS04** Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = x(1-x) \qquad h(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Berechnen Sie die beiden folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

$(f + g + h)(x) =$ $\boxed{}$ $f(g(h(2))) =$ $\boxed{}$

---

[17] **SS04** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = f(x-2)$, so wird der Graph von f um 2 Einheiten nach links verschoben. ( )

b) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = cf(x)$ mit $-1 < c < 1$, so spricht man von einer Stauchung des Graphen von f. ( )

c) $(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2$ ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt in (a, b) und Radius r. ( )

d) Der Abstand zweier auf demselben Kreisrand liegenden Punkte ist das Doppelte des Abstandes vom Mittelpunkt des Kreises, also gleich $2r$, wenn r der Radius des Kreises ist. ( )

e) Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element in einer Menge A ein Element einer Menge B zuordnet. ( )

---

[18] **WS05** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Graphen der Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sind identisch, wenn f und g invers zueinander sind. ( )

b) Die Graphen der Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden, wenn f und g invers zueinander sind. ( )

c) Wenn die Funktionen f und g invers zueinander sind, entspricht der Definitionsbereich von f dem Wertebereich von g und umgekehrt. ( )

d) Wenn die Funktionen f und g invers zueinander sind, so gilt $f(g(x)) = x$ für alle $x \in D_g$ und $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$. ( )

e) Die Funktion, die jeder Person eine Sozialversicherungsnummer zuordnet, ist umkehrbar eindeutig und besitzt daher eine Inverse. ( )

---

[19] **WS05** Die Funktion $y = x^2$, deren Graph auch als Normalparabel bezeichnet wird, verläuft durch den Ursprung $(0, 0)$. Der Graph der Gleichung

$$x^2 + 4x - y = -1$$

entsteht durch eine oder mehrere Verschiebungen der Normalparabel. Geben Sie an, um wie viele Einheiten und in welche Richtungen die Normalparabel verschoben wurde (z.B. 6 Einheiten nach oben und 4 Einheiten nach links).

Verschiebungen: $\boxed{}$

---

[20] **WS05** Bestimmen Sie jeweils den Abstand d zwischen den Punkten P und Q. Geben Sie das Ergebnis, falls erforderlich, mit zwei Nachkommastellen an.

$P = (a, -6)$ und $Q = (3 + a, 2) \quad \Rightarrow \quad d = \boxed{}$

$P = (s, t)$ und $Q = (-t, s)$, wobei $s^2 + t^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad d = \boxed{}$

---

[21] **SS05** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn $y = f(x)$ durch $y = f(x) - c$ ersetzt wird, so wird der Graph um c Einheiten nach oben verschoben, wenn $c > 0$ ist. ( )

b) Wenn $y = f(x)$ durch $y = f(-x)$ ersetzt wird, so wird der Graph von f an der y-Achse gespiegelt. ( )

c) Wenn $y = f(x)$ durch $y = cf(x)$ ersetzt wird, so wird der Graph vertikal gestreckt und an der x-Achse gespiegelt, wenn $c < 0$ ist. ( )

d) Wenn $y = f(x)$ durch $y = f(x + 2)$ ersetzt wird, so wird der Graph von f um 2 Einheiten nach links verschoben. ( )

e) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = f(2x)$ wird der Graph um 2 Einheiten nach links verschoben. ( )

---

[22] **SS05, SS08M1**
Geben Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 - 3}$$

den Definitionsbereich D_f und die Inverse $x = g(y)$ an.

$D_f =$ $\boxed{}$ Inverse: $g(y) =$ $\boxed{}$

---

[23] **SS05, SS08M1**
Es sei

$$f(x) = x^3 + 2x + 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sqrt{x} - 2$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Ausdrücke.

$f(g(9)) =$ $\boxed{}$ $(g \circ f)(3) =$ $\boxed{}$

---

[24] **(II06)** Es sei

$$f(x) = e^x + e^{-x} \qquad \text{und} \qquad x = g(z) = \ln z$$

Bestimmen Sie

$(f \circ g)(z) =$ $\boxed{}$ $f(g(1)) =$ $\boxed{}$

---

[25] **(II06)** Geben Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{5x - 8}{6x + 7}$$

den Definitionsbereich D_f an. Bestimmen Sie die Inverse g und schreiben Sie diese wiederum als Funktion von x.

$D_f =$ Inverse: $g(x) =$

---

[26] **(II06)** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Jede senkrechte Gerade hat höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen einer Funktion. ( )

b) Der Graph der Gleichung $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36$ ist ein Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 6. ( )

c) Der Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 5 ist der Graph der Funktion $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. ( )

d) Der Graph der Gleichung $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36$ kann nicht als Graph einer einzigen Funktion betrachtet werden. ( )

e) Der Graph der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ setzt sich aus den Graphen zweier Funktionen zusammen. ( )

---

[27] **(IV06)** Betrachten Sie die Nachfragefunktion $D = 180 - P$ und die Angebotsfunktion $S = 30 + 3P$. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis P^* und die zugehörige Menge Q^*.

$P^* =$ $Q^* =$

---

[28] **(IV06)** a) Bestimmen Sie den Abstand d der Punkte $P = (2, 3)$ und $Q = (5, 7)$.

$d =$ ☐

b) Bestimmen Sie die Koordinate y des Punktes $R = (5, y)$, so dass R und Q verschieden sind und R genau wie Q den Abstand d von P hat.

$y =$ ☐

c) Geben Sie eine Gleichung für alle Punkte (x, y) an, die den konstanten Abstand d von $P = (2, 3)$ haben.

Gleichung: ☐

---

[29] **(IV06)** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt, dann heißt f eine gerade Funktion, oder man sagt f ist symmetrisch zur y-Achse. ( )

b) Wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt, dann heißt f eine ungerade Funktion, oder man sagt f ist symmetrisch zum Ursprung. ( )

c) Eine Funktion f heißt symmetrisch zur Geraden $x = a$, wenn $f(a+x) = f(a-x)$ für alle x ist. ( )

d) Die Standardnotation f^{-1} für die Inverse einer Funktion f ist immer gleichbedeutend mit dem Ausdruck $1/f$. ( )

e) Wenn die Funktionen f und g Inverse zueinander sind, dann sind die Graphen von $y = f(x)$ und $x = g(y)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$. ( )

---

[30] **SS06, K2** DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn eine Funktion umkehrbar eindeutig ist, hat sie eine inverse Funktion. ( )

b) Die Funktion $y = f(x) = \frac{32}{5} - \frac{3}{10}x$ ist im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend. ( )

c) Sei g die Inverse zu f. Dann sind in einem Koordinatensystem (mit gleichen Einheiten auf beiden Achsen) die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ Spiegelbilder zueinander bezüglich der Geraden $y = x$. ( )

d) Sind g und f invers zueinander, dann ist der Definitionsbereich von f gleich dem Wertebereich von g und umgekehrt. ( )

e) Die Inverse von $f(x) = \frac{32}{5} - \frac{3}{10}x$ ist: $f^{-1}(x) = \frac{10}{3}x + \frac{64}{3}$. ( )

---

[31] **SS06, K2** Finden Sie die Inverse der folgenden Funktion. **Verwenden Sie wieder x als unabhängige Variable.**

$$f(x) = \sqrt[4]{2x} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \boxed{}$$

---

[32] **SS03, SS06K2M1** Die Funktion $f(x)$ sei die Inverse der Funktion $g(x)$. Beide seien für alle $x \geq 0$ definiert. Bestimmen Sie $f(g(x)) + g(f(x))$ für $x = 3$.

$$f(g(3)) + g(f(3)) = \boxed{}$$

---

[33] **WS04, SS06K2M1** Bestimmen Sie alle möglichen Werte von y, für die der Punkt $(5, y)$ auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1, 2)$ und dem Radius $r = 5$ liegt.

$$y = \boxed{}$$

---

[34] **SS06, K1**

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn f und g Inverse zueinander sind, dann sind die Gleichungen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ äquivalent. ( )

b) Der Abstand zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist die Quadratwurzel der Differenz der quadrierten Summen der $x-$ und $y-$Koordinaten. ( )

c) Die Funktion $y = e^{-(x+\mu)^2}$ ist symmetrisch um $x = \mu$. ( )

d) Eine horizontale Linie durch einen beliebigen Punkt der $y-$Achse hat höchstens einen Schnittpunkt mit der Inversen $x = g(y)$ einer Funktion $y = f(x)$. ( )

e) Die Gleichung $y = \pm\sqrt{36 - x^2}$ beschreibt einen Kreis durch den Ursprung mit dem Radius 6. ( )

---

[35] **SS06, K1**
Bestimmen Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$$

die Inverse $x = g(y)$ und geben Sie den Definitionsbereich D_g von g an.

$g(y) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

---

[36] **WS04, SS06K1M1** Sei $f(x) = 3x + 7$.
a) Bestimmen Sie alle Werte von x, für die $f(f(x)) = 55$ gilt.

$x =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie alle Werte von x, für die $(f(x))^2 = 64$ gilt.

$x =$ $\boxed{}$

---

[37] **WS03, SS06K1M1** Betrachten Sie in der Ebene die drei verschiedenen Punkte $P = (2, 4)$, $Q = (5, 6)$ und $R = (5, y)$. Bestimmen Sie y so, dass der Punkt $R \neq Q$ den gleichen Abstand von P hat wie Q von P.

$y =$ $\boxed{}$

---

[38] **WS07, K1**
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Werden die Funktion f und g verkettet, so gilt $f(g(x)) = g(f(x))$. ( )

b) Die verkettete Funktion $f(g(x))$ kann nur dann gebildet werden, wenn der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f liegt. ( )

c) Verkettet man f mit der zu f inversen Funktion g, so ergibt sich die Identität, d.h. $f(g(x)) = x$ und $g(f(x)) = x$. ( )

d) Ohne weitere Informationen ist die Inverse der zu f inversen Funktion nicht zu bestimmen. ( )

e) $(f^{-1})^{-1} = f$. ( )

---

[39] **WS07, M1**
Es sei

$$f(x) = 16x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \log_2(x+2)$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Ausdrücke. **Hinweis:** Geben Sie Zahlenwerte an, andernfalls werden Punkte abgezogen!

$f(g(-1)) =$ $\boxed{}$ $(g \circ f)(-1) =$ $\boxed{}$

---

[40] **WS07M1**
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Alle Punkte innerhalb eines Kreises haben den gleichen Abstand vom Ursprung. ( )

b) Jeder Punkt auf einem Kreis mit Radius r hat den Abstand r^2 vom Mittelpunkt. ( )

c) Der Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene ist immer ≥ 0. ( )

d) Alle Punkte auf einem Kreis haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt. ( )

e) $x^2 + y^2 = 1$ ist die Gleichung des Einheitskreises, d.h. eines Kreises um den Ursprung $(0,0)$ der Ebene mit dem Radius $r = 1$. ( )

---

[41] **WS07M1**
Geben Sie für die Funktion

$$y = 3x^2 + 9 \quad x \geq 0$$

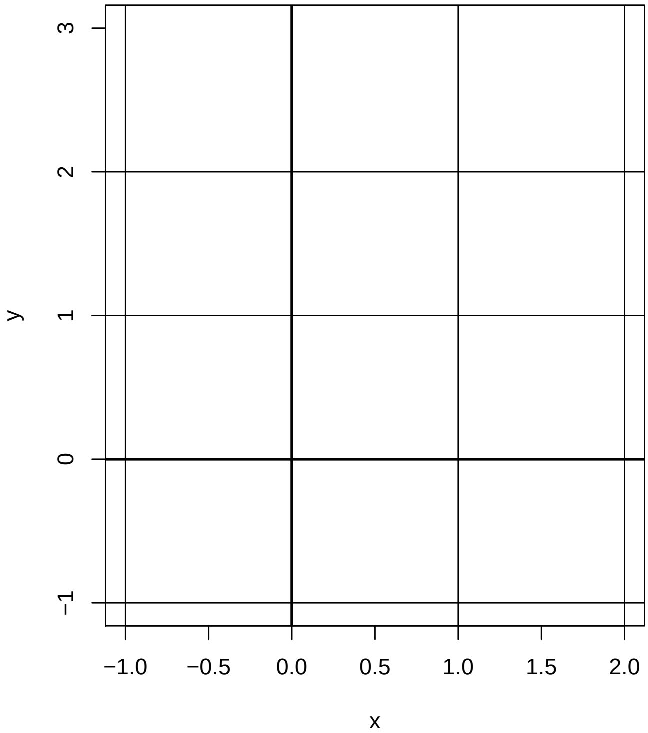
die inverse Funktion $g(x)$ und deren Definitionsbereich D_g an. (**Hinweis:** Verwenden Sie für die Inverse wieder x als freie Variable.)

$g(x) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

---

[42] **WS07K2**
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, indem Sie die Graphen der beiden Funktion $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ zeichnen. Geben Sie im Lösungskästchen den/die Schnittpunkt(e) der beiden Graphen an. **Hinweis:** Denken Sie an die Verschiebung von Graphen!

$$y_1 = f_1(x) = (x-1)^2 + 2$$
$$y_2 = f_2(x) = -(x-1)^2 + 2$$



Schnittpunkt(e):

---

[43] **IV07M1**
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Der Graph einer Gleichung ist immer auch der Graph einer Funktion. ( )

b) Der Graph einer Funktion hat mit jeder vertikalen Geraden höchstens einen Schnittpunkt. ( )

c) Ist a ein Punkt aus dem Definitionsbereich der Funktion f, so hat die Gerade $x = a$ genau einen Schnittpunkt mit dem Graphen der Funktion f. ( )

d) Eine streng monotone Funktion hat mit jeder waagerechten Geraden höchstens einen Schnittpunkt. ( )

e) Für die auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$ auch dann, wenn die Funktion f nicht stetig ist auf $[a, b]$. ( )

---

[44] **IV07M1**
Geben Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \ln(x-3) - 3 \qquad x > 3$$

die inverse Funktion $g(x)$ und deren Definitionsbereich D_g an. (**Hinweis:** Verwenden Sie für die Inverse wieder x als freie Variable.)

$g(x) = $ $\boxed{}$ $D_g = $ $\boxed{}$

---

[45] **SS07K1**
Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

Bestimmen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Als Ergebnisse werden **ganze Zahlen** erwartet. **Verwenden Sie keinen Taschenrechner, da dieser eventuell eine Fehlermeldung erzeugt!**

$(f+g)(8) = $ $\boxed{}$ $(f \cdot g)(-1) = $ $\boxed{}$

$f(g(27)) = $ $\boxed{}$ $(g \circ f)(\sqrt{7}) = $ $\boxed{}$

---

[46] **SS07K2**
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Betrachtet wird eine Funktion von A nach B.

a) In obigem Zusammenhang ist A der Definitionsbereich und B der Zielbereich. ( )

b) Statt Zielbereich sagt man auch Wertebereich. ( )

c) Eine Funktion von A nach B ist eine Regel, die jedem Element aus A genau ein Element aus B zuordnet. ( )

d) Jedes Element aus dem Wertebereich ist Bild genau eines Elementes aus A. ( )

e) Falls $f(A) = B$ und jedes Element aus B das Bild genau eines Elementes aus A ist, so besitzt die Funktion eine inverse Funktion. Diese ist eine Funktion von B nach A. ( )

---

[47] **SS07M1**
Der Punkt $(3,3)$ liege auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1,0)$. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises.

Gleichung des Kreises: $\boxed{}$

---

[48] **SS07M1**
Bestimmen Sie die Inverse der Funktion $y = x^5/32$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich!

$x = \boxed{}$

---

[49] **WS08K1**
In der Vorlesung wurden Ihnen nützliche Regeln zur Verschiebung bzw. Spiegelung von Graphen vorgestellt. Welche Schritte sind erforderlich, um ausgehend vom Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

zum Graphen der Funktion

$$g(x) = 3 - \sqrt{x+2}$$

zu gelangen? (Bitte **notieren Sie die einzelnen Schritte in den Kästchen auf folgende Weise**: „Verschiebung um sechs Einheiten nach unten“)

1. Schritt: $\boxed{}$

2. Schritt: $\boxed{}$

3. Schritt: $\boxed{}$

---

[50] **WS08M1**
Der Punkt $(4,3)$ liege auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1,2)$. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises.

Gleichung des Kreises: $\boxed{}$

---

[51] **WS08M1**
DREI der folgenden Funktionen haben **KEINE** Umkehrfunktion? Kreuzen Sie sie an.

a) $f(x) = e^{-x^2}$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

b) $f(x) = x^3 - x$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

c) $f(x) = e^{-x}$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

d) $f(x) = -x^2$ für $x \in [0, \infty)$ ( )

e) $f(x) = \ln(e^3)$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ( )

---

[52] **WS08M1**
Es sei

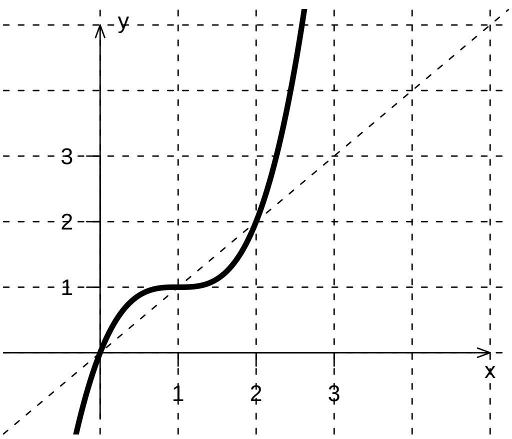
$$f(x) = x^3 + 2x + 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sqrt{x} - 2$$

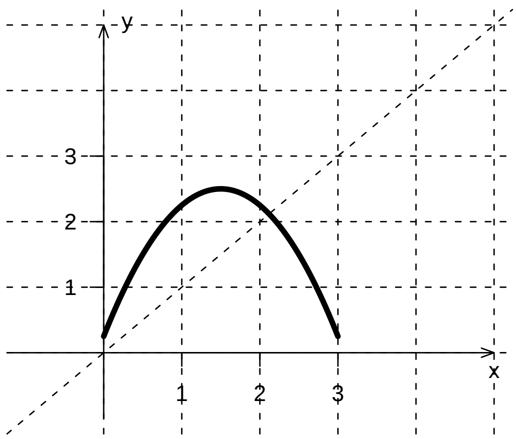
Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Ausdrücke.

$f(g(4)) = \boxed{}$ $(g \circ f)(3) = \boxed{}$

---

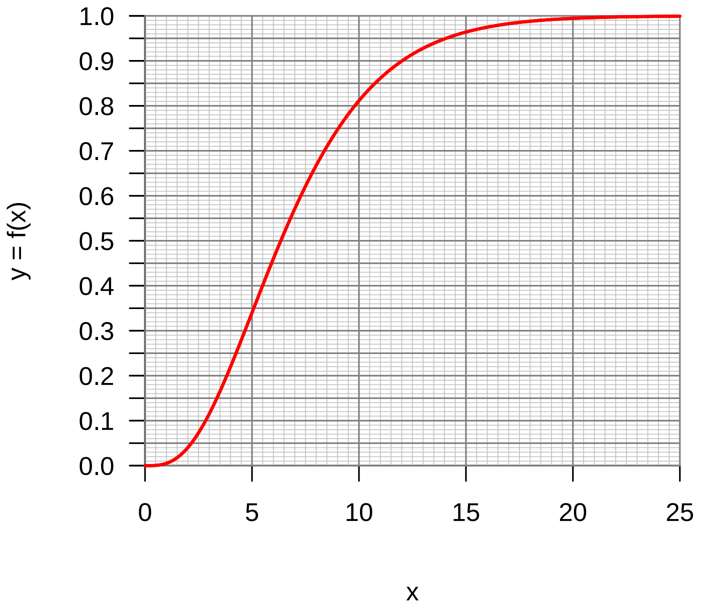
[53] **WS08K2**
Zeichnen Sie zu den Graphen der folgenden Funktion $f(x)$ bzw. $g(x)$ jeweils den Graphen der inversen Funktion $f^{-1}(x)$ bzw. $g^{-1}(x)$ ein. Falls es keine Inverse gibt, so schreiben Sie bitte **KEINE** in die Graphik hinein.





---

[54] **SS08K1**
Die folgende Abbildung zeigt eine streng monoton steigende Funktion $y = f(x)$. Sie hat demnach eine inverse Funktion $x = g(y)$. Bestimmen Sie den Funktionswert der zu f inversen Funktion $g(y)$ an der Stelle $y_0 = 0.35$ auf graphische Weise, d.h. zeichnen Sie zwei geeignete Geraden ein, so dass $x_0 = g(0.35)$ abgelesen werden kann.



---

[55] **SS08K1**
Es sei $f(x) = -4x + 3$. Die Gleichung $f(f(x)) = 0$ hat genau eine Lösung x_0. Bestimmen Sie diese.

$x_0 =$ $\boxed{}$

---

[56] **SS08K2**
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ist $x = g(y)$ invers zu $y = f(x)$, so sind die Graphen der beiden Funktionen in einem (x, y)-Koordinatensystem identisch. ( )

b) Eine streng monoton wachsende Funktion ist umkehrbar eindeutig. ( )

c) Die Funktion f ist genau dann umkehrbar eindeutig, wenn sie streng monoton wachsend ist. ( )

d) Die Funktion f ist genau dann umkehrbar eindeutig, wenn sie eine inverse Funktion hat. ( )

e) Die Funktionen $\exp(x)$ und $\ln(x)$ sind invers. Daher gilt $\exp(\ln(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. ( )

---

[57] **WS09K1**

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Summe der beiden Funktion e^x und $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert. ( )

b) Die Summe der beiden Funktion e^x und $\ln x$ ist im gesamten Definitionsbereich größer als $\ln x$. ( )

c) Die Summe der beiden Funktion e^x und $\ln x$ ist im gesamten Definitionsbereich größer als e^x. ( )

d) Die Funktion e^x und $\ln x$ können auf ganz $\mathbb{R}$ in beliebiger Reihenfolge verkettet werden. ( )

e) Zwei Funktionen f und g können nur dann zu $f \circ g$ verkettet werden, wenn der Wertebereich der inneren Funktion g im Definitionsbereich der äußeren Funktion f liegt. ( )

---

[58] **WS09K2**

Betrachten Sie die beiden folgenden Funktionen und berechnen Sie dann die unten angegebenen Ausdrücke.

$$f(x) = (x+1)^3 \qquad g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$$

$f(8) \cdot g(8) =$ $\boxed{}$ $(f \circ g)(8) =$ $\boxed{}$

---

[59] **SS09K2**

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = -16$$

beschreibt einen Kreis in der Ebene. Geben Sie die Kreisgleichung in der Form

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

an, so dass man daraus den Mittelpunkt und den Radius des Kreises ablesen kann.

Kreisgleichung: $\boxed{}$

---

[60] **SS09K1**
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (x+1)^3$$

und berechnen Sie dann die unten angegebenen Ausdrücke.

$f^{-1}(8) =$ $\boxed{}$ $(f(1))^{-1} =$ $\boxed{}$

---

[61] **SS09K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *inversen Funktionen*.

a) Die Funktion $y = f(x)$ hat eine Inverse, wenn zu jedem x genau ein y gehört.

b) Die Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar eindeutig, wenn es zu jedem y aus dem Bildbereich von f genau ein x aus dem Definitionsbereich von f gibt mit $y = f(x)$.

c) Eine streng monoton steigende Funktion ist umkehrbar eindeutig und hat eine Inverse.

d) Quadratische Funktionen haben eine inverse Funktion.

e) Wenn g die inverse Funktion zu f ist dann gilt $g(f(x)) = x$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,e	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[62] **X09M1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Graphen von Funktionen bzw. Gleichungen.*

a) Jede senkrechte Gerade hat höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen einer Funktion.

b) Der Graph der Gleichung $(x-2)^2+(y-4)^2=36$ ist ein Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 6.

c) Der Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 5 ist der Graph der Funktion $y=\pm\sqrt{25-x^2}$.

d) Der Graph der Gleichung $(x-2)^2+(y-4)^2=36$ kann nicht als Graph einer einzigen Funktion betrachtet werden.

e) Der Graph der Gleichung $x^2+y^2=25$ setzt sich aus den Graphen zweier Funktionen zusammen.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,c,d	a,c,e	a,d,e	b,d,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[63] **WS10K1**
Geben Sie in den folgenden Fällen jeweils die Inverse $x = g(y)$ (falls sie existiert) und den Definitionsbereich D_g der Inversen g an.

Streichen Sie die entsprechenden Kästchen, wenn die Inverse nicht existiert.

$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow$

$x = g(y) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (x \geq 0) \quad \Rightarrow$

$x = g(y) =$ $\boxed{}$ $D_g =$ $\boxed{}$

---

[64] **WS10K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Graphen von Funktionen und Gleichungen.*

a) Der Graph einer Gleichung ist immer auch Graph einer Funktion.

b) Der Graph einer Gleichung ist genau dann auch Graph einer Funktion, wenn jede horizontale Gerade höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen hat.

c) Der Graph einer Gleichung in zwei Variablen x und y besteht aus allen Paaren (x, y), die diese Gleichung erfüllen.

d) Der Graph der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r = 2$.

e) Man erhält den Graphen der Funktion $y = (x - 1)^2 + 1$, indem man den Graphen der Normalparabel $y = x^2$ um eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben verschiebt.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,c,d	b,c,d	b,d,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[65] **SS10,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *inversen Funktionen.*

a) Eine Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie streng monoton steigend ist.

b) Eine Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie umkehrbar eindeutig ist.

c) Eine für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $y = f(x)$ ist genau dann umkehrbar eindeutig, wenn für alle x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

d) Wenn zwei Funktionen invers zu einander sind, dann haben die beiden Funktionen denselben Definitionsbereich und auch denselben Wertebereich.

e) $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[66] **SS10,K2**
Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \ln x$$

Für welche x ist die Verkettung $(f \circ g)(x)$ definiert?

Die Verkettung ist definiert für $\boxed{}$

---

[67] **SS10,K2** Es sei

$$y = f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

Die zu f inverse Funktion sei mit $g(y)$ bezeichnet. Bestimmen Sie $g(1/10)$.

$g(1/10) =$ $\boxed{}$

---

[68] **WS11,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Umkehrfunktionen.*

a) Man erhält die Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x)$, indem man in der Formel $y = f(x)$ die Symbole x und y vertauscht.

b) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie umkehrbar eindeutig ist.

c) Hat die Funktion f eine inverse Funktion f^{-1}, so ist der Definitionsbereich von f^{-1} gleich dem Wertebereich von f und der Wertebereich von f^{-1} ist gleich dem Definitionsbereich von f.

d) Die Funktion $y = x^2$ hat die Umkehrfunktion $x = \pm\sqrt{y}$.

e) Eine zwar monoton wachsende, jedoch nicht streng monoton wachsende Funktion hat keine Umkehrfunktion.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[69] **WS11,K2**
Bestimmen Sie die zu

$$y = f(x) = \ln x^2 + \ln x^3$$

inverse Funktion $g(y)$.

$g(y) =$ $\boxed{}$

---

[70] **WS11,K2**
Es sei

$$f(x) = 4x \qquad \text{und} \qquad g(x) = 3x - 2$$

Bestimmen Sie $f(g(x)) - g(f(x))$.

$$f(g(x)) - g(f(x)) = \boxed{}$$

---

[71] SS11,K1 Die folgenden Aussagen befassen sich mit *inversen Funktionen*. Dabei wird die zu f inverse Funktion mit f^{-1} bezeichnet.

a) Eine Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie umkehrbar eindeutig ist.

b) Jede monoton wachsende Funktion hat eine inverse Funktion.

c) Es gilt $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$.

d) Für $x \in D_f$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

e) Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ invers zueinander, so erhält man den Graphen von g, indem man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden spiegelt, wobei vorausgesetzt wird, dass beide Achsen dieselbe Skalierung haben.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[72] **SS11,K2**
Betrachten Sie in der (x, y)-Ebene die drei Punkte:

$$R = (2, 5) \qquad S = (1, 8) \qquad T = (a, 2)$$

Für welche Werte von a ist der Abstand zwischen R und T gleich dem Abstand zwischen R und S?

$$a = \boxed{}$$

---

[73] **WS11,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *inversen Funktionen.*

a) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie umkehrbar eindeutig ist.

b) Die Funktionen f und f^{-1} haben immer denselben Definitionsbereich.

c) Sind die Funktionen f und g invers zu einander, so gilt $f(g(x)) = x$ für alle $x \in D_g$ und $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.

d) Da die natürliche Logarithmusfunktion $\ln(x)$ invers zur natürlichen Exponentialfunktion e^x ist, gilt $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

e) Ist die Funktion $y = f(x)$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, so hat sie eine inverse Funktion.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[74] **WS11,K2**
Es sei

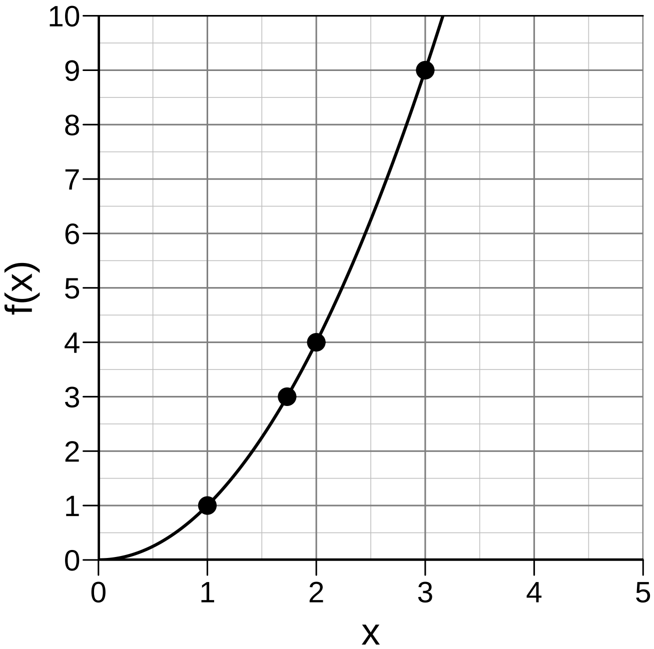
$$f(x) = x^2 + x - 1$$

Bestimmen Sie $f(x + 1)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$$f(x + 1) = \boxed{}$$

---

[75] **SS12,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Graphen* der in der folgenden Abbildung dargestellten Funktion f und ihrer Inversen f^{-1}.



a) Die Funktion f ist streng monoton steigend und hat daher eine inverse Funktion.

b) $f^{-1}(f(3)) = 3$

c) $f(f^{-1}(4)) = 2$

d) Für $a \in [0, 10]$ gilt $f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$.

e) Die Abbildung zeigt: Für jedes $x \in [0, 5]$ gibt es genau ein $y \in [0, 10]$ mit $y = f(x)$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[76] **SS12,K2**
Bestimmen Sie die zu

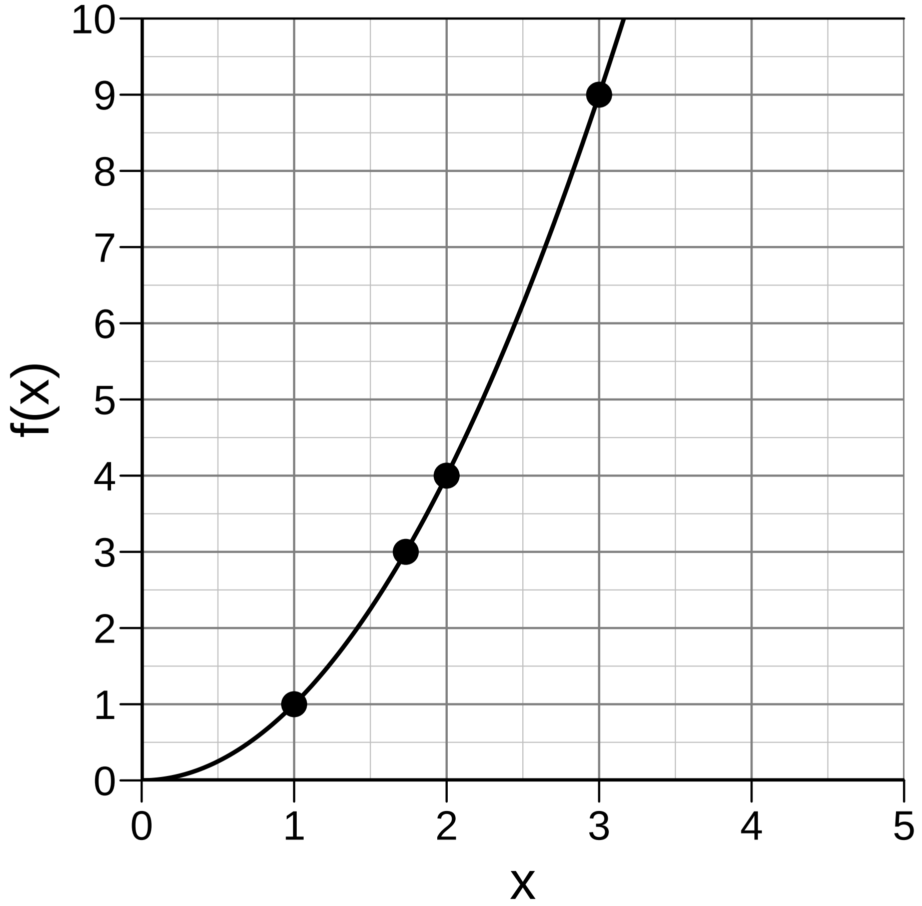
$$y = f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} \qquad x < 0$$

inverse Funktion $x = g(y)$.

$g(y) = \boxed{}$

---

[77] **SS12,K2**
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer streng monotonen und damit invertierbaren Funktion f. Die Inverse sei mit f^{-1} bezeichnet.



Bestimmen Sie: $f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big)$

$$f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big) = \boxed{}$$

[78] **WS13,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Graphen von Gleichungen und Graphen von Funktionen.*

a) Der Graph einer Gleichung kann immer auch als Graph einer Funktion aufgefasst werden.

b) Hat jede waagerechte Gerade $y = c$ höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen einer Gleichung, so stellt der Graph auch eine Funktion $y = f(x)$ dar.

c) Ist eine Gleichung in zwei Variablen x und y gegeben, so bezeichnet man eine Darstellung aller Lösungspaare der Gleichung in einem kartesischen Koordinatensystem als Graphen der Gleichung.

d) Der Graph der Gleichung $2x + 3y = 4$ ist eine Gerade.

e) Ist der Graph einer Gleichung auch der Graph einer Funktion $y = f(x)$, so gibt es zu jedem $x \in D_f$ genau ein y, so dass (x, y) auf dem Graphen der Gleichung liegt.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[79] **WS13,K2**
Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{64}$$

den Ausdruck

$$f^{-1}(1) + \big(f(2)\big)^{-1} .$$

$$f^{-1}(1) + \big(f(2)\big)^{-1} = \boxed{}$$