Alte Klausuraufgaben zu Kapitel 15

(WS 2002/03 - III 2013)

von
Prof. Dr. Fred Böker
Institut für Statistik und Ökonometrie
Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 5

37073 Göttingen

Tel. 0551-394604; email: fboeker@uni-goettingen.de

20. März 2013

[1] WS03, SS06K1M2, WS08M2
Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme an.
Hinweise:
1.) Schreiben Sie ,,KEINE", wenn das Gleichungssystem keine Lösungen hat.
2.) Wenn eine oder mehrere der Variablen frei wählbar sind, so setzen Sie die Werte dieser Variablen gleich s bzw. t.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

---

[2] WS03, SS06K1M2

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$, wenn sie definiert sind. **Hinweis:** Schreiben Sie ,,**NICHT**" in das entsprechende Kästchen, wenn Sie der Meinung sind, dass das Matrizenprodukt nicht definiert ist.

$\boldsymbol{AB} = \boxed{}$ $\boldsymbol{BA} = \boxed{}$

---

[3] WDHWS03, SS07M2

Es werden drei Güter G_j aus vier Rohstoffen hergestellt. Die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ enthält in der j-ten Spalte den Verbrauchsvektor für das Gut j. Zum Beispiel für die Herstellung einer Einheit des Gutes G_1 werden 2 Einheiten von R_1, 1 Einheit R_2, 3 Einheiten R_3 und 2 Einheiten R_4 gebraucht (die Zahlen stehen in der ersten Spalte). Der Vektor $\boldsymbol{x}$ gibt an, wie viele Einheiten der Güter G_j hergestellt werden. Berechnen Sie den Bedarf der Rohstoffe. Schreiben Sie das Ergebnis als Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$\boldsymbol{b} = \boxed{}$

---

[4] WDHWS03, WS07M2
a) Betrachten Sie die Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$. Bilden Sie das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

b) Fassen Sie die obigen Zeilenvektoren als 1×3-Matrizen auf und bilden Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} =$

---

[5] WDHWS03, SS06K2M2 Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2)$. Berechnen Sie die Länge $\|\, \boldsymbol{a} \,\|$ des Vektors $\boldsymbol{a}$.

$\|\boldsymbol{a}\| =$

---

[6] WS03 Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2)$ und $\boldsymbol{b} = (-1, 2, b_3)$. Bestimmen Sie b_3, so dass die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ orthogonal sind.

$b_3 =$

---

[7] WDHWS03 Betrachten Sie die beiden Vektoren $\boldsymbol{a} = (3, 1, 1)$ und $\boldsymbol{b} = (1, -2, -1)$. Geben Sie den Winkel θ zwischen diesen beiden Vektoren in Grad an.

θ in Grad:

---

[8] WS03, SS06K2M2, WS08M2

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch den Punkt $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, die orthogonal zu dem Vektor $\boldsymbol{p} = (1, 1, 3)$ ist. (**Hinweis:** Geben Sie das Ergebnis in der Gestalt $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b$ an.)

Gleichung der Ebene: $\boxed{}$

---

[9] WS03, WS08M2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich dem Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}$ mit sich selbst. ( )

b) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich $\|a\| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$. ( )

c) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten des Vektors. ( )

d) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist der Abstand des Ursprungs von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. ( )

e) Für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt: $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. ( )

---

[10] SS03, SS08M2

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(\boldsymbol{AB})'$.

$(\boldsymbol{AB})' = \boxed{}$

---

[11] SS03 Betrachten Sie im $I\!R^3$ die Ebene mit der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$$

und die Gerade mit den drei Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t \\ x_2 &= 2 - t \\ x_3 &= 2 + t \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene, falls es einen eindeutigen Schnittpunkt gibt. Geben Sie diesen als Zeilenvektor (s_1, s_2, s_3) an.

$(s_1, s_2, s_3) =$ $\boxed{}$

---

[12] SS03, SS08M2
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $\boldsymbol{a} = (1, 2, 2)$ und $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 3)$. Schreiben Sie dabei die Koordinaten x_i , $i = 1, 2, 3$ als Funktion von $t \in I\!R$.

$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$

---

[13] SS03, SS08M2
Betrachten Sie die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -13 & 14 & -15 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von a, b und c gilt $CD = I_3$, wobei I_3 die Einheitsmatrix der Ordnung 3 sei.

$a =$	$b =$	$c =$

---

[14] SS03 Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}^t = (a, 2, 0)$ und $\boldsymbol{b}^t = (-4, 2a, 7)$.

Winkel in Grad: $\boxed{}$

---

[15] SS03 Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Das Gauss'sche Eliminationsverfahren ist eine allgemeine Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme. ( )

b) Bei dem in a) erwähnten Verfahren wird die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform gebracht. ( )

c) Beim Gauss'schen Eliminationsverfahren werden elementare Spaltenoperationen durchgeführt, die das gegebene Gleichungssystem in ein äquivalentes überführen. ( )

d) Das Gauss'sche Eliminationsverfahren funktioniert nur bei einer eindeutigen Lösung des Gleichungssystems. ( )

e) Das Gauss'sche Eliminationsverfahren kann auch benutzt werden, um zu zeigen, dass ein Gleichungssystem inkonsistent ist, d.h. keine Lösung hat. ( )

---

[16] SS03 Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Zwei geometrische Vektoren in der Ebene, die dieselbe Richtung und dieselbe Länge haben, sind gleich. ( )

b) Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei Vektoren in der Ebene, die im Ursprung beginnen, so verläuft die Differenz $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ von der Pfeilspitze von $\boldsymbol{a}$ zur Pfeilspitze von $\boldsymbol{b}$. ( )

c) Wenn t eine reelle Zahl und $\boldsymbol{a}$ ein Vektor in der Ebene, so zeigen $\boldsymbol{a}$ und $t\boldsymbol{a}$ in dieselbe Richtung. ( )

d) Ein Vektor in der Ebene kann sowohl als gerichtete Strecke als auch als geordnetes Zahlenpaar aufgefasst werden. ( )

e) Die Summe zweier Vektoren in der Ebene kann als Diagonale in dem von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramm aufgefasst werden. ( )

---

[17] WS04

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die folgenden Matrizen.

$\boldsymbol{A}^2 = \boxed{}$ $\boldsymbol{A}^3 = \boxed{}$

$\boldsymbol{A}^3 - 2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = \boxed{}$

---

[18] WS04 Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boxed{}$ $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boxed{}$

---

[19] WS04
Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -2x + 4y - 2z &= -2 \\ -3x + y + 2z &= -5 \\ - 7y + 4z &= 23 \end{aligned}$$

Gehen Sie nach dem Gauß´schen Eliminationsverfahren vor und wenden Sie so lange elementare Zeilenumformungen an, bis Sie eine Treppenstufenform erhalten, d.h. die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein und unterhalb der führenden Einträge sollen in der entsprechenden Koeffizientenmatrix Nullen stehen.

(a) Schreiben Sie das **Gleichungssystem** in Treppenstufenform auf. **HINWEIS:** Oberhalb der führenden Einträge sollen keine Nullen erzeugt werden.

(b) Schreiben Sie das in (a) erhaltene Gleichungssystem in Matrizenform auf, d.h. in der Form

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}, \qquad \text{wobei } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie also die Matrix $\boldsymbol{A}$ und den Vektor $\boldsymbol{b}$ an.

$\boldsymbol{A} =$

$\boldsymbol{b} =$

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem.

$x =$

$y =$

$z =$

[20] WS04, WS09K1

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$ $z =$ $\boxed{}$

---

[21] WS04 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Für die $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ gilt: $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y})^2 = \boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^2$. ( )

b) Ist die Matrix $\boldsymbol{B}$ mit den Einträgen b_{ij} die Transponierte der $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Einträgen a_{ij}, so gilt für $k = 1, 2, ..., n$: $a_{nk} = b_{kn}$. ( )

c) Das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ habe die Lösungen $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ Dann ist $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ ebenfalls eine Lösung dieses Gleichungssystems. ( )

d) Die Aussage in c) ist WAHR, falls $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. ( )

e) Die n-dimensionalen Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ seien verschieden (und ungleich dem Nullvektor). Dann ist $t(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ mit $t \in I\!R$ eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft. ( )

---

[22] SS04 Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} 4x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 & = & 9 & \text{(i)} \\ 20x_1 + 13x_2 + 17x_3 & = & 50 & \text{(ii)} \\ 8x_1 + \ \ 4x_2 + \ \ 8x_3 & = & 20 & \text{(iii)} \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem soll mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens gelöst werden.

(a) Bringen Sie dieses Gleichungssystem auf Treppenstufenform mit x_1, x_2 und x_3 als führenden Einträgen. Die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein. Geben Sie die zu diesem *Lösungsstadium* gehörige **erweiterte Koeffizientenmatrix** an. **Hinweis:** Es sollen **noch keine Nullen über** den führenden Einträgen erzeugt werden! Es wird nur die **erweiterte Koeffizientenmatrix** als Lösung anerkannt.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

(b) Geben Sie die Lösung des Gleichungssystems an:

$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

[23] SS04 Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke, falls sie definiert sind. Ansonsten streichen Sie bitte das Kästchen durch.

$3\boldsymbol{AB} = \boxed{}$ $\qquad$ $\boldsymbol{CD}' = \boxed{}$

$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{BD})' = \boxed{}$

---

[24] SS04 Betrachten Sie die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den oder die Vektoren mit der kleinsten Länge an: $\boxed{}$

b) Genau ein Paar der obigen Vektoren ist orthogonal zueinander. Geben Sie dieses Paar an:

Orthogonal sind: $\boxed{}$

---

[25] SS04 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ hat jede Ebene durch den Ursprung mit jeder beliebigen Geraden wenigstens einen Schnittpunkt. ( )

b) Eine Hyperebene im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension $n-1$. ( )

c) Die Gerade L durch die Punkte $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Punkte $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für die gilt: $\boldsymbol{x} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ für eine reelle Zahl t. ( )

d) Ist der Vektor $\boldsymbol{p}$ Normale zu der Ebene $\mathcal{E}$, dann ist $\boldsymbol{p}$ orthogonal zu jeder Geraden in der Ebene $\mathcal{E}$. ( )

e) Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ immer $\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \leq |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$. ( )

---

[26] WS05 Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$ für beliebige Konstanten a und b. Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$.

$\boldsymbol{A}^2 =$ $\boxed{}$

---

[27] WS05 Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß´schen Eliminationsverfahrens die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Geben Sie zunächst die **erweiterte Koeffizientenmatrix** mit Einsen als führenden Einträgen in der Hauptdiagonalen an. Die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen sollen noch nicht zu ,,Null" gemacht werden!

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

---

[28] WS05 Die Gerade L im dreidimensionalen Raum sei gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 = -5t + 2 \qquad x_2 = 3t + 3 \qquad x_3 = -2t + 4 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

Bestimmen Sie den Punkt $P = (a, b, c)$, in dem L die Ebene

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

schneidet.

$a =$ $b =$ $c =$

---

[29] WS05 Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$x_1 =$ $x_2 =$

[30] WS05 Betrachten Sie zwei n-Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ist ein Skalar. ( )

b) Wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren sind, so ergibt das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'$ eine $n \times n$-Matrix. ( )

c) Für das innere Produkt gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$ für alle $\boldsymbol{a}$. ( )

d) Wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren sind, so ergibt das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ eine reelle Zahl. ( )

e) Das Skalarprodukt zweier Vektoren entspricht der Multiplikation der jeweiligen Komponenten, d.h. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ist ein Vektor mit den Komponenten $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$. ( )

---

[31] SS05 Stellen Sie sich vor, Sie haben ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen in den Unbekannten x_1, x_2, x_3 und x_4 zu lösen. Nach einigen elementaren Zeilenumformungen haben Sie die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Lösungen des Gleichungssystems an:

$x_1 = \boxed{}$ $x_2 = \boxed{}$ $x_3 = \boxed{}$ $x_4 = \boxed{}$

---

[32] SS05 Berechnen Sie die Produkte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$, falls möglich, für die folgenden Matrizen. Schreiben Sie **NICHT DEFINIERT** in das Kästchen, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{AB} = \boxed{}$ $\boldsymbol{BA} = \boxed{}$

---

[33] SS05 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei n-Vektoren und t und s reelle Zahlen sind, sagt man, dass der n-Vektor $t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$ eine Linearkombination von t und s ist. ( )

b) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sagt aus, dass das innere Produkt zweier orthogonaler Vektoren Null ergibt. ( )

c) Das Produkt der Normen zweier Vektoren ist immer größer gleich dem Betrag des inneren Produkts dieser beiden Vektoren. ( )

d) Wenn $\boldsymbol{p}$ die Normale zu der Ebene $\boldsymbol{C}$ ist, bedeutet das, dass $\boldsymbol{p}$ orthogonal zu jeder Geraden in der Ebene ist. ( )

e) Der erste Schritt des Gauss'schen Eliminationsverfahren besteht in der Erzeugung einer Treppenstufenform für die Matrix mit 1 als Koeffizienten für jeden von Null verschiedenen führenden Eintag. ( )

---

[34] SS05 Bestimmen Sie den Wert (es gibt genau einen) von a, für den die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ idempotent ist:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$$

HINWEIS: Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ist idempotent, wenn $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

$a =$ $\boxed{}$

---

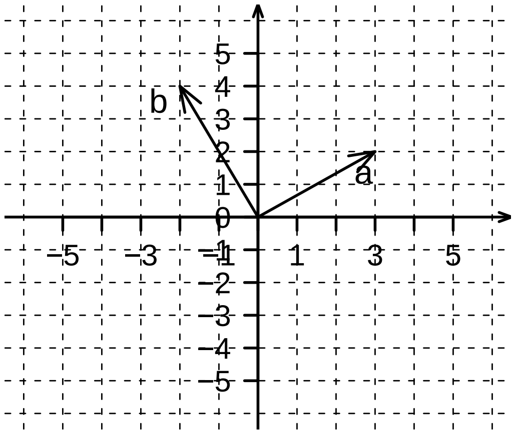
[35] SS05 Die Produkte P_i eines Unternehmens werden in den Ländern L_j verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen V_{ij} für jedes Produkt und Land sind in der Matrix $\boldsymbol{V}$ gegeben. Die Umsatzziele sind im Vektor $\boldsymbol{z}$ gegeben. Wie hoch müssen die Preise (p_1, p_2, p_3) gewählt werden, um die gesteckten Umsatzziele zu erreichen?

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$(p_1, p_2, p_3) =$ $\boxed{}$

---

[36] SS05 Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, die in der unten stehenden Grafik dargestellt sind. Bestimmen Sie die Vektoren $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 0.5\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ und zeichnen Sie diese in die unten stehende Grafik mit entsprechender Kennzeichnung ein.



$\boldsymbol{c} =$ ☐ $\boldsymbol{d} =$ ☐

---

[37] WS06 Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen in den Variablen a, b, c und d linear sind und welche nicht. Schreiben Sie in das entsprechende Kästchen **LINEAR** bzw. **NICHT LINEAR**.

$$\frac{6ab}{b} + \frac{c^3 + dc^3}{7c^2} = 12$$

☐

$$d + c + a + b = (b + c + d + a)^2$$

☐

---

[38] WS06 Berechnen Sie die Produkte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$, soweit möglich, für die folgenden Matrizen. Schreiben Sie **NICHT DEFINIERT** in das Kästchen, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ a & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{AB} =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{BA} =$ $\boxed{}$

---

[39] WS06 Bestimmen Sie die Werte von a, b mit $a + b + 1 = 0$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$

---

[40] WS06 Während der Durchführung der Gauß'schen Elimination zur Lösung eines linearen Gleichungssystems ergeben sich folgende Darstellungen der erweiterten Koeffizientenmatrix. Geben Sie jeweils die Lösungen (x, y, z) an. Schreiben Sie KEINE in das Lösungskästchen, falls Sie der Meinung sind, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $(x, y, z) =$ $\boxed{}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $(x, y, z) =$ $\boxed{}$

---

[41] WS06 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ein lineares Gleichungssystem, dass wenigstens eine Lösung hat, wird konsistent genannt. Wenn das System keine Lösung hat, sagt man, dass es inkonsistent ist. ( )

b) Wenn die Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$ beide definiert sind, haben beide Matrizen die selbe Ordnung. ( )

c) Für die Matrizenmultiplikation gelten das Assosiativgesetz, das Distributivgesetz und das Kommutativgesetz. ( )

d) Die Einheitsmatrix ist immer eine quadratische Matrix. ( )

e) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ kann die Nullmatrix sein, auch wenn weder $\boldsymbol{A}$ noch $\boldsymbol{B}$ die Nullmatrix ist. ( )

---

[42] WS06 Bestimmen Sie die Werte für a und b so, dass die Vektoren $\boldsymbol{x}' = (1, a, 2)$ und $\boldsymbol{y}' = (3, 4, b)$, sowie auch $\boldsymbol{u}' = (3, 5, a)$ und $\boldsymbol{v}' = (b, 2, 3)$ orthogonal zueinander sind.

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$

---

[43] (II06) Berechnen Sie $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ und $2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} =$ $\boxed{}$

$2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B} =$ $\boxed{}$

---

[44] (II06) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c für die die folgende Matrix idempotent ist:

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -4 \\ -1 & b & 2a \\ 1 & -2 & 3c \end{pmatrix}$$

HINWEIS: Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt idempotent, wenn $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Es gibt hier genau eine Lösung!

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$ $c =$ $\boxed{}$

---

[45] (II06) DREI der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ ist stets größer als Null. ( )

c) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten des Vektors. ( )

d) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist der Abstand des Ursprungs von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. ( )

e) Für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt: $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| > \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$. ( )

b) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich $\|\boldsymbol{a}\| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$. ( )

---

[46] (II06) Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme an.
Hinweise:
1.) Schreiben Sie ,,KEINE", wenn das Gleichungssystem keine Lösungen hat.
2.) Wenn eine oder mehrere der Variablen frei wählbar sind, so setzen Sie die Werte dieser Variablen gleich s bzw. t.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 8 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

---

[47] (IV06) Betrachten Sie die Zeilenvektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$. Bilden Sie die folgenden Matrizenprodukte:

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}' =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[48] (IV06) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch den Punkt $\boldsymbol{a} = (1, 2, 2)$, die orthogonal zu dem Vektor $\boldsymbol{p} = (1, 1, 0)$ ist. (**Hinweis:** Geben Sie das Ergebnis in der Gestalt $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b$ an.)

Gleichung der Ebene: $\boxed{}$

---

[49] (IV06) Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 2, 2)$ und $\boldsymbol{b} = (-1, 3, b_3)$. Bestimmen Sie b_3, so dass die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ orthogonal sind.

$b_3 =$ $\boxed{}$

---

[50] (IV06) DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ein System linearer Gleichungen nennt man inkonsistent, wenn das System keine Lösung hat. ( )

b) Nur quadratische Matritzen können eine Hauptdiagonale besitzen. ( )

c) Eine Nullmatrix ist immer eine quadratische Matrix. ( )

d) Für die Matritzenmultiplikation gilt das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz. ( )

e) Die Einheitsmatrix ist immer eine quadratische Matrix, deren Elemente in der Hauptdiagonalen alle 1 sind. Die übrigen Elemente sind alle Null. ( )

---

[51] (IV06) Berechnen Sie $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{B'A}, \boldsymbol{A'} + \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Falls irgendein Ausdruck nicht definiert sein sollte, so schreiben Sie bitte **NICHT DEFINIERT** in das Lösungskästchen.

$\boldsymbol{AB} =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{B'A} =$ $\boxed{}$

$\boldsymbol{A'} + \boldsymbol{B} =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} =$ $\boxed{}$

---

[52] SS06, K2 Es sei $\alpha = \sqrt{2}$, sowie $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\mathbf{A}$, wenn folgender Zusammenhang gilt: $\alpha \cdot \mathbf{A'} = \mathbf{B}$

$\mathbf{A} =$ $\boxed{}$

---

[53] SS06, K2 Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3a \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Ausdruck $\mathbf{3A} - \mathbf{2B}$.

$\mathbf{3A} - \mathbf{2B} =$ $\boxed{}$

---

[54] SS06, K2 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Skalar. ( )

b) Für das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. ( )

c) Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren, so ist das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ gleich dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$. ( )

d) Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren, so gilt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'$. ( )

e) Für alle Vektoren $\boldsymbol{a}$ gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$. ( )

---

[55] WDHWS03, SS06K2M2 Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2)$. Berechnen Sie die Länge $\|\boldsymbol{a}\|$ des Vektors $\boldsymbol{a}$.

$\|\boldsymbol{a}\|=$ $\boxed{}$

---

[56] WS03, SS06K2M2, WS08M2

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch den Punkt $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, die orthogonal zu dem Vektor $\boldsymbol{p} = (1, 1, 3)$ ist. (**Hinweis:** Geben Sie das Ergebnis in der Gestalt $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b$ an.)

Gleichung der Ebene: $\boxed{}$

---

[57] SS06, K1

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte $\boldsymbol{A} = (2, 3, 4), \boldsymbol{B} = (3, 1, 1)$ und $\boldsymbol{C} = (-5, 2, 5)$. **HINWEIS:** Die Gleichung ist in der Form $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = c$ anzugeben.

Ebenengleichung: $\boxed{}$

---

[58] SS06, K1

Gegeben ist Ihnen das folgende Gleichungssystem:

$$x + 3y - 2z = 4$$

$$2y - z = -5$$

$$4x - 2y - 6z = 2$$

Bringen Sie mithilfe elementarer Zeilenoperationen das Gleichungssystem in eine Treppenstufenform, d.h. die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein. Oberhalb der führenden Einträge sollen **keine Nullen** erzeugt werden.
Stellen Sie Ihr Ergebnis in Form der **erweiterten Koeffizientenmatrix** dar.

---

[59] SS06K1M2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Das Produkt zweier Matrizen ist wie das Skalarprodukt zweier Vektoren stets ein Skalar. ( )

b) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ ist genau dann definiert, wenn die Zeilenanzahl von $\boldsymbol{A}$ gleich der Spaltenanzahl von $\boldsymbol{B}$ ist. ( )

c) Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ. ( )

d) Die Division von Matrizen ist nicht definiert. ( )

e) Wenn das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ die Nullmatrix ergibt, so folgt daraus nicht, dass entweder $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$ die Nullmatrix sein muss. ( )

---

[60] WS03, SS06K1M2, WS08M2
Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme an.
Hinweise:
1.) Schreiben Sie ,,KEINE”, wenn das Gleichungssystem keine Lösungen hat.
2.) Wenn eine oder mehrere der Variablen frei wählbar sind, so setzen Sie die Werte dieser Variablen gleich s bzw. t.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

[61] WS03, SS06K1M2

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$, wenn sie definiert sind. **Hinweis:** Schreiben Sie ,,**NICHT**" in das entsprechende Kästchen, wenn Sie der Meinung sind, dass das Matrizenprodukt nicht definiert ist.

$\boldsymbol{AB} = \boxed{}$ $\boldsymbol{BA} = \boxed{}$

---

[62] WS07,K1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Zeilen in $\boldsymbol{B}$ mit der Anzahl der Spalten in $\boldsymbol{A}$ übereinstimmt. ( )

b) Falls $\boldsymbol{B}$ eine 3×4 Matrix und $\boldsymbol{A}$ eine 5×3 Matrix ist, ist das Produkt $\boldsymbol{AB}$ eine 4×5-Matrix. ( )

c) Falls $\boldsymbol{I}$ eine Einheitsmatrix der Ordnung n und $\boldsymbol{A}$ eine $n \times k$-Matrix ist, so ist $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$. ( )

d) Im Fall c) gilt auch immer $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$. ( )

e) Das Quadrat $\boldsymbol{A}^2$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$ ist nur für quadratische Matrizen definiert. ( )

---

[63] WS07, K1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Das innere Produkt ist für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ definiert. ( )

b) Für das innere Produkt zweier n-Vektoren gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. ( )

c) Das innere Produkt eines Vektors $\boldsymbol{a}$ mit sich selbst entspricht der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$. ( )

d) Zwei Vektoren im n-dimensionalen Raum stehen genau dann senkrecht auf einander, wenn ihr inneres Produkt Null ist. ( )

e) Die Gerade durch die Punkte $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Gleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ für $t \in \mathbb{R}$. ( )

---

[64] WDHWS03, WS07M2

a) Betrachten Sie die Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$. Bilden Sie das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

b) Fassen Sie die obigen Zeilenvektoren als 1×3-Matrizen auf und bilden Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[65] WS07, K1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems in den Variablen x, y und z sei

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 49 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem!

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$ $z =$ $\boxed{}$

---

[66] WS07, K1

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2a^2-2 \\ 3-a & 7 & 6-a^2 \\ a^2+1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $(3\boldsymbol{A})' =$ $\boxed{}$

b) Für wie viele a gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$? Anzahl der $a =$ $\boxed{}$

---

[67] WS07K2

Gegeben sind die beiden Vektoren $\mathbf{a} = (-2, 4, 1)$ und $\mathbf{b} = (5, 3, 2)$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

Geben Sie das exakte Ergebnis an und verwenden Sie keinen Taschenrechner!

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ $\boxed{}$ $\|\mathbf{a}\| =$ $\boxed{}$ $\|\mathbf{b}\| =$ $\boxed{}$

---

[68] WS07K2

Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Von den beiden Matrizenprodukten **AB** und **BA** ist nur eins definiert. Geben Sie in dem ersten Kästchen an, welches Matrizenprodukt definiert ist und geben Sie das Ergebnis dieses Produkts im zweiten Kästchen an.

Definiert ist: $\boxed{}$ $=$ $\boxed{}$

[69] WS07K2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a^2+2 & 6 \\ 4a-2 & 2b & b^2-1 \\ a-4b & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von a und b ist die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch?

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$

---

[70] SS07K1
Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^2 =$ $\boxed{}$

---

[71] SS07K1
Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen in den Variablen x, y, s, t und w linear sind und welche nicht. Schreiben Sie **linear** bzw. **nicht linear** in das entsprechende Lösungskästchen.

$$\frac{8}{3\sqrt{a}}x + 2.445y - w = 0 \qquad (a > 0)$$ $\boxed{}$

$$(x-t)^2 + (y-s)^2 = w^2$$ $\boxed{}$

---

[72] SS07K1
Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (3, -t, 1)$ und $\mathbf{b} = (t, -2t, 1)$. Bestimmen Sie t, so dass die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.

$t =$ $\boxed{}$

---

[73] SS07M2
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Alle Matrizen können addiert werden. ( )
b) Matrizen können nur dann addiert werden, wenn sie eine Hauptdiagonale haben. ( )
c) Für jede Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A}$. ( )
d) Für eine Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Nullmatrix gleicher Ordnung gilt: $\boldsymbol{A}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. ( )
e) Die Einheitmatrix ist immer eine quadratische Matrix. ( )

---

[74] WDHWS03, SS07M2
Es werden drei Güter G_j aus vier Rohstoffen hergestellt. Die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ enthält in der j-ten Spalte den Verbrauchsvektor für das Gut j. Zum Beispiel für die Herstellung einer Einheit des Gutes G_1 werden 2 Einheiten von R_1, 1 Einheit R_2, 3 Einheiten R_3 und 2 Einheiten R_4 gebraucht (die Zahlen stehen in der ersten Spalte). Der Vektor $\boldsymbol{x}$ gibt an, wie viele Einheiten der Güter G_j hergestellt werden. Berechnen Sie den Bedarf der Rohstoffe. Schreiben Sie das Ergebnis als Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$.

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$\boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[75] SS07M2
Betrachten Sie die beiden Vektoren $\boldsymbol{a} = (3, 1, 1)$ und $\boldsymbol{b} = (1, -2, -1)$. Es sei θ der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren. Berechnen Sie $\cos(\theta)$.

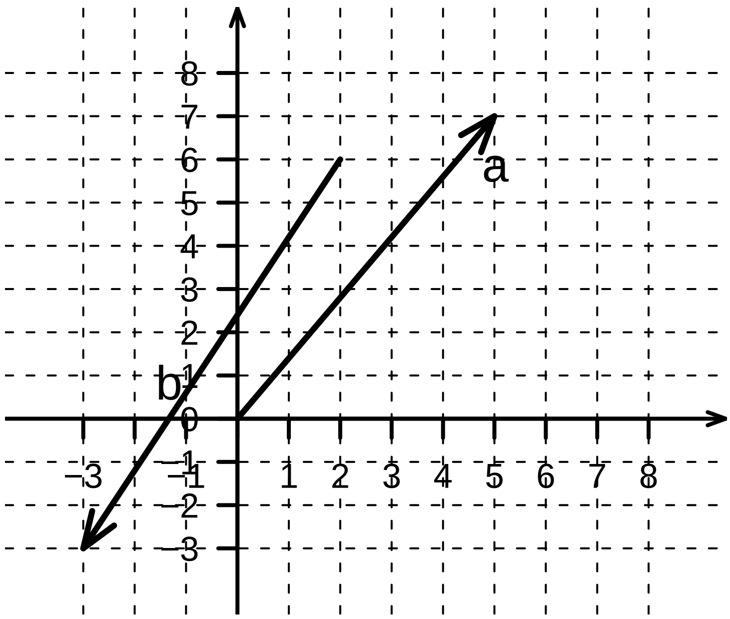
$\cos(\theta) =$ $\boxed{}$

---

[76] SS07K2
Berechnen Sie die Länge (oder Norm) $\|\mathbf{a}\|$ des Vektors $\mathbf{a} = (5, 7)$.

$\|\mathbf{a}\| =$ $\boxed{}$

In der folgenden Graphik ist neben $\mathbf{a}$ auch der Vektor $\mathbf{b}$ abgebildet. Geben Sie den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ an.



$\mathbf{c} =$ $\boxed{}$

---

[77] SS07K2
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Es wird eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ betrachtet.

a) Für die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^n$ durch die verschiedenen Punkte $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ für $t \in \mathbb{R}$. ( )

b) Der Punkt $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ liegt auch auf der Geraden durch die Punkte $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. ( )

c) Eine andere Schreibweise für die in a) gegebene Geradengleichung ist: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\boldsymbol{x} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ ( )

d) Eine andere Schreibweise für die in a) gegebene Geradengleichung ist: $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. ( )

e) Die Gerade durch den Ursprung $O = (0, \ldots, 0)$ in derselben Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{a}$ ist gegeben durch die Gleichung $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a}$ für $t \in \mathbb{R}$. ( )

---

[78] WS08K1
Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen in den Variablen a, b, c und d linear sind und welche nicht. Schreiben Sie in das entsprechende Kästchen **LINEAR** bzw. **NICHT LINEAR**.

$$-\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{b - a} = 6$$

$$(a+c)(b+d)(a+d)(c+b) = 69$$

---

[79] WS08K1
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$x - z = -5$$

$$3x + y - 3z = -12$$

$$x + 2y - 2z = a$$

$x =$ $\qquad$ $y =$ $\qquad$ $z =$

---

[80] WS08K2
Bestimmen Sie x so, dass die Vektoren $\boldsymbol{a} = (3, 4, x)$ und $\boldsymbol{b} = (x, 1, 1)$ orthogonal sind.

$x =$

[81] WS08K2
Betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von a gilt $\mathbf{AB} = \mathbf{I_3}$, wobei $\mathbf{I_3}$ die Einheitsmatrix der Ordnung 3 sei.

$a =$ $\boxed{}$

---

[82] WS08K2
Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (1) & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10 \\ (2) & 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ (3) & 20x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 22 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem soll mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens gelöst werden.

Bringen Sie dieses Gleichungssystem auf Treppenstufenform mit x_1, x_2 und x_3 als führenden Einträgen. Die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein. Geben Sie die zu diesem *Lösungsstadium* gehörige **erweiterte Koeffizientenmatrix** an.
Hinweis: Es sollen **noch keine Nullen über** den führenden Einträgen erzeugt werden! Es wird nur die **erweiterte Koeffizientenmatrix** als Lösung anerkannt.

Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\boxed{}$

---

[83] SS08K1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ein System linearer Gleichung ist nur dann konsistent, wenn es genau eine Lösung hat. ( )

b) Ein System linearer Gleichungen heißt inkonsistent, wenn es keine Lösung hat. ( )

c) Auch ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen ist konsistent. ( )

d) Kann in einem linearen Gleichungssystem eine Variable frei gewählt werden und sind die anderen Variablen eindeutig bestimmt, sobald die freie Variable gewählt wurde, so hat das System einen Freiheitsgrad. ( )

e) Hat ein lineares Gleichungssystem einen oder mehrere Freiheitsgrade, so ist das System inkonsistent. ( )

---

[84] SS08K1
Sei $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = \boxed{}$ $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' = \boxed{}$

---

[85] SS08K2

Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen x_1, x_2 und x_3 sei in Matrixform gegeben durch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die drei Gleichungen des Gleichungssystems in der üblichen Form auf.

1. Gleichung: $\boxed{}$

2. Gleichung: $\boxed{}$

3. Gleichung: $\boxed{}$

---

[86] SS08K2

Berechnen Sie für die beiden Zeilenvektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$ das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3, 2, 1)$.

$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \boxed{}$

---

[87] SS08K2

Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 3, 1)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 4, b_3)$. Bestimmen Sie b_3 so, dass die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ orthogonal sind.

$b_3 = \boxed{}$

---

[88] WS09K1

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die folgenden Matrizenprodukte, falls sie existieren. Wenn das Matrizenprodukt nicht existiert, schreiben Sie **NICHT DEFINIERT** in das Kästchen.

$AB =$ $\boxed{}$ $BA =$ $\boxed{}$

---

[89] WS04, WS09K1

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$ $z =$ $\boxed{}$

---

[90] WS09K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Jede Matrix hat eine Hauptdiagonale. ( )

b) Eine $n \times 1$-Matrix ist ein Spaltenvektor. ( )

c) Ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen kann in der Form $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ geschrieben werden, wobei A die $m \times n$-Matrix der Koeffizienten, $\boldsymbol{x}$ ein n-dimensionaler Spaltenvektor der Variablen und $\boldsymbol{b}$ ein m-dimensionaler Vektor der rechten Seiten ist. ( )

d) Zwei Matrizen können nur dann gleich sein, wenn sie dieselbe Ordnung haben. ( )

e) Die Addition zweier Matrizen ist nicht vertauschbar. ( )

---

[91] WS09K2
Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen in den Variablen x, y, s und t linear sind und welche nicht. Schreiben Sie **linear** bzw. **nicht linear** in das entsprechende Lösungskästchen.

$4.5s - \frac{1}{3}t = \sqrt{10} \cdot x + y$

$\sqrt{s} - t = 4$

---

[92] WS09K2
Bestimmen Sie a_3, so dass die beiden Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, a_3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$ orthogonal sind.

$a_3 =$

---

[93] SS09K2
Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, die Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$.

Falls eins der Matrizenprodukte **nicht definiert** ist, streichen Sie das Kästchen einfach durch.

$\boldsymbol{AB} =$

$\boldsymbol{BA} =$

---

[94] SS09K2
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Wenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren so lange an, bis die Koeffizientenmatrix zu einer oberen Dreiecksmatrix geworden ist, d.h. unterhalb der Hauptdiagonalen sollen Nullen stehen und alle Elemente der Hauptdiagonalen sollen 1 sein.

Oberhalb der Hauptdiagonalen sollen noch keine Nullen stehen.

Es sollen auch keine Zeilen vertauscht werden.

Geben Sie für dieses Stadium der Berechnung die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[95] SS09K2
Bestimmen Sie die **positive** Zahl $a > 0$, so dass der Vektor

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{2}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4} \right)$$

normiert ist, d.h. die Länge $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ hat.

$a =$

---

[96] SS09K1
Für das Produkt der Matrizen $\boldsymbol{A}_{4\times 3}$ und $\boldsymbol{B}_{3\times 2}$ gelte

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{B'A'}$ an.

$\boldsymbol{B'A'}$ $\boxed{}$

---

[97] SS09K1
Bestimmen Sie die Konstante c, so dass die Vektoren $\boldsymbol{x} = (1, 2, 2)$ und $\boldsymbol{y} = (2, -3, c)$ orthogonal sind.

$c =$ $\boxed{}$

---

[98] **SS09K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Gauß'schen Eliminationsverfahren.*

a) Das Gauß'sche Eliminationsverfahren kann nur dann angewendet werden, wenn das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

b) Das Gauß'sche Eliminationsverfahren ist nur dann anwendbar, wenn man gleich viele Variablen wie Gleichungen hat.

c) Man kann das Gauß'sche Eliminationsverfahren auch verwenden, um zu zeigen, dass ein Gleichungssystem inkonsistent ist.

d) Hat ein Gleichungssystem mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen eine eindeutige Lösung, so lässt sich die Koeffizientenmatrix mit elementaren Zeilenoperationen in eine Einheitsmatrix verwandeln.

e) Ergibt sich beim Gauß'schen Elimiantionsverfahren zum Schluss ein System, bei dem k der insgesamt n Variablen nicht als führenden Einträge auftreten, so hat das Gleichungssystem $n - k$ Freiheitsgrade.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b	a,c	b,d	c,d	d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[99] **VIII09** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *inneren Produkt sowie dem Matrizenprodukt von Vektoren.*

a) Das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Skalar.

b) Für das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

c) Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren, so ist das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ gleich dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

d) Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren, so gilt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'$.

e) Für alle Vektoren $\boldsymbol{a}$ gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,c,d	a,c,e	b,c,d	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[100] WS10K1
Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\boldsymbol{A}'$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$.

Berechnen Sie, falls möglich, die Matrizenprodukte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$.

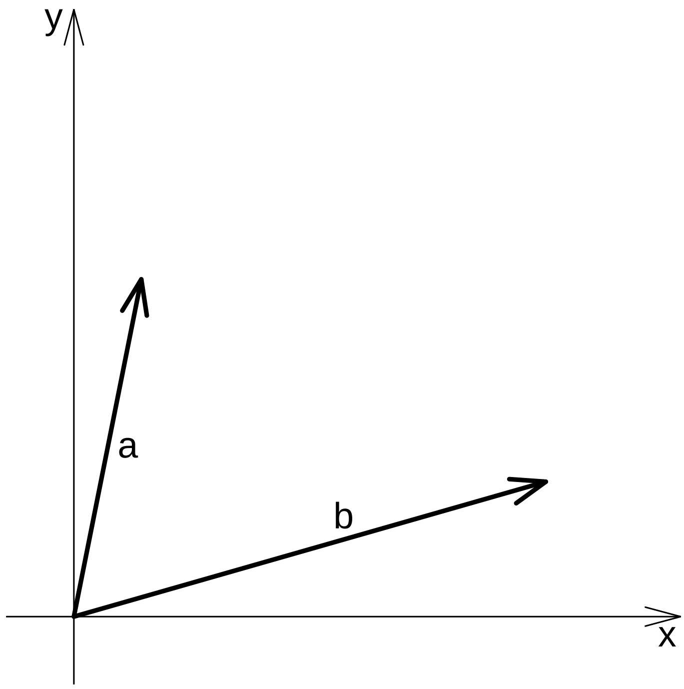
Falls eins der Matrizenprodukte **nicht definiert** ist, streichen Sie das Kästchen einfach durch.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boxed{}$ $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boxed{}$

---

[101] WS10K1
Die folgende Graphik zeigt die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ in der Ebene.

Zeichnen Sie den Vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ein.



[102] WS10K1
Bestimmen Sie die Konstante a so, dass die beiden Vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 4, 5)$ und $\boldsymbol{y} = (1, -3, a)$ orthogonal sind.

$a =$ $\boxed{}$

---

[103] WS10K2
Bestimmen Sie die Lösung (x_1^0, x_2^0, x_3^0) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) =$ $\boxed{}$

---

[104] WS10K2
Bestimmen Sie für die beiden Vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 3, 6)$ und $\boldsymbol{y} = (1, -3, -2)$ die Linearkombination $3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$.

$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} =$ $\boxed{}$

---

[105] **WS10K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Matrizenprodukt*.

a) Falls $\boldsymbol{A}$ eine $m \times n$- und $\boldsymbol{B}$ eine $n \times m$-Matrix, so sind beide Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$ definiert.

b) Wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Spaltenvektoren sind, so stimmt das Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ mit dem inneren Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ überein.

c) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ ist nur dann definiert, wenn $\boldsymbol{A}$ so viele Zeilen wie $\boldsymbol{B}$ Spalten hat.

d) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ kann nur dann eine Nullmatrix ergeben, wenn eine der beiden Matrizen eine Nullmatrix ist.

e) Wenn $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, so ist das Element c_{ij}, d.h. das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $\boldsymbol{C}$, das innere Produkt der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ und der j-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,b,e	b,c,e	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[106] SS10,K1
Bestimmen Sie die Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $\boldsymbol{a} = (2, 4, 1)$ und $\boldsymbol{b} = (7, 2, 6)$ verläuft.

Geben Sie die Gleichungen für die drei Komponenten (x_1, x_2, x_3) aller Punkte $\boldsymbol{x}$ auf der Geraden an.

$x_1 = \boxed{}$ $x_2 = \boxed{}$ $x_3 = \boxed{}$

---

[107] **SS10,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Matrizen*.

a) Wie die Multiplikation darf auch die Addition von zwei Matrizen nicht vertauscht werden.

b) Das Produkt zweier Matrizen $\boldsymbol{AB}$ ist genau dann definiert, wenn $\boldsymbol{A}$ genau so viele Spalten hat, wie $\boldsymbol{B}$ Zeilen hat.

c) Sei $\boldsymbol{I}$ eine Einheitsmatrix. Ist das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AI}$ definiert, so gilt $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$.

d) Zwei Matrizen können nur dann gleich sein, wenn sie dieselbe Ordnung haben.

e) Ist das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ definiert, so auch $\boldsymbol{BA}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[108] SS10,K2
Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nur eins der beiden Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$ ist definiert. **Welches?**

Definiert ist das Matrizenprodukt: $\boxed{}$

Bestimmen Sie das Matrizenprodukt:

Matrizenprodukt = $\boxed{}$

[109] SS10,K2
Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem nach der Gauß'schen Eliminationsmethode.

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Erzeugen Sie **Nullen unterhalb** der führenden Einträge.
- Erzeugen Sie **keine Nullen oberhalb** der führenden Einträge.
- Geben Sie als Lösung die **erweiterte Koeffizientenmatrix** an.
- Um Rundungsfehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, mit Brüchen zu rechnen!

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[110] WS11,K1
Für welchen positiven Wert von a ist der Vektor $(3a, 4a)$ normiert, d.h. hat der Vektor die Länge 1?

$a =$

---

[111] WS11,K1

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[112] WS11,K1

Lösen Sie für eine Konstante $a \neq 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &= 8 \\ 4ax_1 + 2ax_2 &= 16a \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) =$ $\boxed{}$

---

[113] **WS11,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Skalarprodukt* $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ zweier n-Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$.

a) Das Skalarprodukt ist die Summe der Produkte $a_i \cdot b_i;\ i = 1, \ldots, n$.

b) Das Skalarprodukt stimmt mit dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'$ überein.

c) Das Skalarprodukt ist kommutativ, d.h. es gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

d) Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1$ gilt.

e) Das Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}$ mit sich selbst entspricht dem quadrierten Abstand des Punktes $(a_1, \ldots, a_n)$ vom Ursprung $O = (0, \ldots, 0)$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[114] WS11,K2
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

soll nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst werden. Formen Sie die zu diesem Gleichungssystem gehörige erweiterte Koeffizientenmatrix so weit um, dass die Koeffizienten der führenden Einträge 1 sind und unterhalb der führenden Einträge Nullen stehen. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden.

Geben Sie die zu diesem Stadium gehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[115] SS11,K1 Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Matrizenmultiplikation* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$.

a) Die Matrizenmultiplikation ist nur dann definiert, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ genau so viele Spalten hat wie $\boldsymbol{B}$ Zeilen hat.

b) Das Matrizenprodukt von $\boldsymbol{A}_{n\times m}$und $\boldsymbol{B}_{m\times p}$ ist eine $n \times p$-Matrix $\boldsymbol{C}$.

c) Aus $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ folgt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, wenn $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

d) Wenn $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ mit $m \neq n$, so gilt $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_m = \boldsymbol{A}$.

e) Die Matrizenmultiplikation ist nicht vertauschbar.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[116] SS11,K1
Berechnen Sie $\boldsymbol{A}^2$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^2 =$ $\boxed{}$

---

[117] SS11,K1
Wie muss die Zahl b gewählt werden, damit die beiden Vektoren $\boldsymbol{x} = (a, 2a, 3a)$ und $\boldsymbol{y} = (b, -1, 2)$ orthogonal sind?

$b =$ $\boxed{}$

---

[118] SS11,K2
Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{ABC}$.

$\boldsymbol{ABC} =$ $\boxed{}$

---

[119] SS11,K2
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

---

[120] SS11,K2
Bestimmen Sie für die beiden Vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 1, 0)$ und $\boldsymbol{y} = (0, 1, 2)$ die Linearkombination $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y}$.

$2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} =$ $\boxed{}$

---

[121] WS11,K1
Berechnen Sie $\boldsymbol{A}_1 - 2\boldsymbol{A}_2$, wenn

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3a & 2a & 4a \\ 2a & 5a & 6a \\ 2a & 4a & 7a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a & a & 2a \\ a & 2a & 3a \\ a & 2a & 3a \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_1 - 2\boldsymbol{A}_2 =$ $\boxed{}$

---

[122] WS11,K1
Berechnen Sie $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$ $\boxed{}$

---

[123] **WS11,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Vektoren.*

a) Das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist gegeben durch den Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n)$

b) Für das innere Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

c) Der Vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ verläuft von der Pfeilspitze von $\boldsymbol{a}$ zur Pfeilspitze von $\boldsymbol{b}$.

d) Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $-\boldsymbol{a}$ haben die gleiche Länge und entgegengesetzte Richtung.

e) Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[124] WS11,K2
Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen ergab sich mit Hilfe der Gauß'schen Elimination nach einigen Schritten die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems (x_1, x_2, x_3).

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

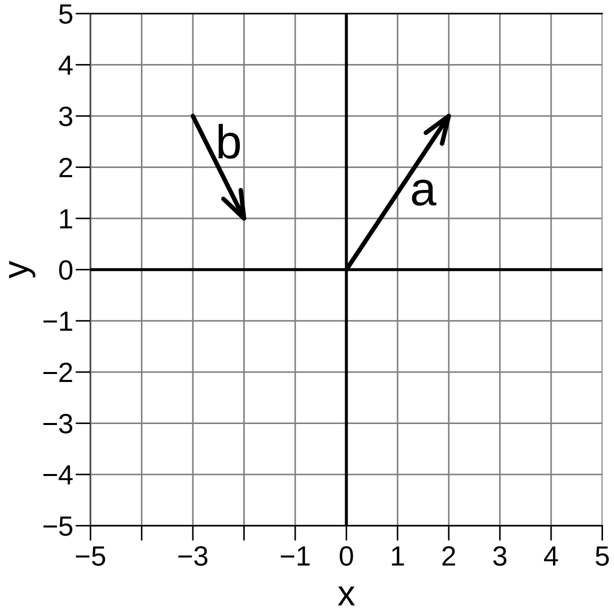
---

[125] WS11,K2
Welche Bedingung müssen die Zahlen a und b erfüllen, damit die Vektoren $\boldsymbol{x} = (a, -2, b^2)$ und $\boldsymbol{y} = (a, ab, 1)$ orthogonal sind?

Bedingung: $\boxed{}$

---

[126] WS11,K2
Die folgende Abbildung zeigt die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.



$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[127] **SS12,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Matrizenmultiplikation.* Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ Matrizen.

a) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ ist genau dann definiert, wenn $\boldsymbol{B}$ so viele Zeilen hat, wie $\boldsymbol{A}$ Spalten hat.

b) Wenn $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ und $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, dann ist $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

c) Wenn für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ gilt, dann gilt auch $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}$.

d) Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{AB}$ kann nur dann eine Nullmatrix ergeben, wenn einer der beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$ eine Nullmatrix ist.

e) Im Allgemeinen ist $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, d.h. die Faktoren dürfen nicht vertauscht werden.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[128] SS12,K1
Berechnen Sie $\boldsymbol{A}^2$, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2a & -a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \boxed{}$$

---

[129] SS12,K1
Es sei $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (1, 2, 3)$. Berechnen Sie $(2\boldsymbol{a}) \cdot (3\boldsymbol{b})$.

$(2\boldsymbol{a}) \cdot (3\boldsymbol{b}) =$ $\boxed{}$

---

[130] SS12,K2
Berechnen Sie das Matrizenprodukt $(\boldsymbol{AB})'$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{AB})' =$ $\boxed{}$

---

[131] SS12,K2
Es sei $\boldsymbol{a} = (2c, 1, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (c, 2, 3)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} =$ $\boxed{}$

---

[132] SS11,K2
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 28 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in Treppenstufenform mit x_1, x_2 und x_3 als führenden Einträgen, d.h. die Koeeffizienten von x_1, x_2 und x_3 sollen 1 sein. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden.

Geben Sie als Lösung die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[133] **WS13,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Skalarprodukt und der Norm von Vektoren.*

a) Die Länge eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich dem Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}$ mit sich selbst.

b) Die Norm eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich $\|a\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

c) Die Norm eines Vektors $\boldsymbol{a}$ ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten des Vektors.

d) Die Norm eines Vektors $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist der Abstand des Punktes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vom Ursprung.

e) Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind orthogonal, wenn $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[134] WS13,K1
Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' =$ $\boxed{}$

---

[135] WS13,K1
Für welche Konstante a sind die Vektoren

$$\boldsymbol{x}_1 = (a, 2a, 3) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{x}_2 = (1, -1, 1)$$

orthogonal?

$a =$ $\boxed{}$

---

[136] WS13,K2
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 &= 25 \\ 5x_1 + 12x_2 + 18x_3 &= 39 \end{aligned}$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens in Treppenstufenform, d.h. in die Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 &= d_2 \\ x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Treppenstufenform: $\boxed{}$

---

[137] WS13,K2
Für welcheKonstante $a > 0$ ist der Vektor

$$a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{4}\right)$$

normiert, d.h. für welches $a > 0$ hat er die Länge 1?

$a =$ $\boxed{}$
