Alte Klausuraufgaben zu Kapitel 8

(WS 2002/03 - III 2013)

von
Prof. Dr. Fred Böker
Institut für Statistik und Ökonometrie
Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 5
37073 Göttingen

Tel. 0551-394604; email: fboeker@uni-goettingen.de

20. März 2013

[1] WS03M2, SS06K1M1 Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei

$$Q(A) = 9A^2 - \frac{1}{16}A^3 \qquad A \in [0, 100] \ ,$$

wobei A die Anzahl der Arbeitskräfte bezeichne.
a) Welche Anzahl A^* von Arbeitskräften maximiert den Output $Q(A)$?

$A^* =$

b) Welche Anzahl A^{**} maximiert den Output pro Arbeitskraft $Q(A)/A$?

$A^{**} =$

---

[2] WS03M2, WS07M1
Durch die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten eines Produkts hat ein Unternehmen die Erlöse

$$R(Q) = -0.0012Q^2 + 40Q$$

und die Kosten

$$C(Q) = 0.0008Q^2 + 4Q + 32\,000$$

Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Maximaler Gewinn:

---

[3] WDHWS03, SS06K2M1 Die Funktion f hat den Definitionsbereich $D_f = (-1, \infty)$. Sie hat **genau einen Extrempunkt und genau zwei Wendepunkte**. Bestimmen Sie den Extrempunkt, geben Sie an, ob es ein Maximum oder Minimum ist, und bestimmen Sie die Wendepunkte, wenn die erste Ableitung gegeben ist durch:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^3}{2(x+1)}$$

Extrempunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

Extrempunkt ist (Maximum oder Minimum) ? $\boxed{}$

Wendepunkte an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[4] WDHWS03, SS07M1
Ein Anbieter kann maximal $Q_{max} = 80$ Mengeneinheiten seines Produktes herstellen. Die Kostenfunktion sei $C(Q) = 3Q + 280$. Der Verkaufspreis für eine Einheit des Produktes sei 12 Geldeinheiten. Bei welcher Produktionsmenge Q^* wird der Stückgewinn, d.h. der Gewinn pro Mengeneinheit maximiert.

$Q^* =$ $\boxed{}$

---

[5] WS03M2 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) An der Stelle $x = c$ liegt ein Wendepunkt der Funktion f vor, wenn die zweite Ableitung an der Stelle $x = c$ ihr Vorzeichen wechselt. ( )

b) Geht eine zweimal differenzierbare Funktion von einer Links- in eine Rechtskurve über, so liegt ein Wendepunkt vor. ( )

c) Wenn $f''(c) = 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle $x = c$ vor. ( )

d) Wenn die in einem Intervall I zweimal stetig differenzierbare Funktion f einen Wendepunkt in einem inneren Punkt c des Intervalls I hat, so ist dort $f''(c) = 0$. ( )

e) Eine strikt konkave Funktion kann kein Maximum haben. ( )

---

[6] WS03M1 Ein Anbieter habe für sein Produkt die Kostenfunktion $C(Q) = Q^3 - 12Q^2 + 42Q + 240$. Die Kapazitätsgrenze liege bei 15 Mengeneinheiten. Der Marktpreis betrage 69 Geldeinheiten pro Mengeneinheit. Bestimmen Sie die bei diesem Preis gewinnmaximale Angebotsmenge Q^*.

$Q^* =$ $\boxed{}$

---

[7] WS03M1
Ein Unternehmen kann maximal 40 Einheiten eines Produkts pro Tag herstellen. Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seien $2Q^2 + 10Q + 450$. Der Preis pro Einheit sei 210 Euro. Berechnen Sie den maximalen **Stückgewinn**.

Maximaler **Stückgewinn**: Euro

---

[8] WS03M1, SS06K1M1
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x} .$$

Bestimmen Sie die Extrempunkte, d.h. die x-Koordinaten der Extrempunkte und sagen Sie dazu, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Geben Sie bitte auch an, ob es ein lokaler oder sogar ein globaler Extrempunkt ist. **Hinweis:** Es gibt nicht mehr als zwei Extrempunkte. Bitte streichen Sie die zweite Lösungszeile, wenn es nur einen Extrempunkt gibt.

$x =$ Max/Min Global/Lokal

$x =$ Max/Min Global/Lokal

---

[9] WS03M1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Funktion f hat ein lokales Minimum in c, wenn es ein Intervall (α, β) um c herum gibt, so dass $f(x) \geq f(c)$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. ( )

b) Lokale Extrempunkte einer Funktion f, die auf einem Intervall I definiert sei, können nur die Endpunkte des Intervalls sein oder innere Punkte, für die $f'(x) = 0$ gilt. ( )

c) Die Funktion f sei stetig in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall und differenzierbar im Innern des Intervalls. Dann existiert zu jeder Sekante eine Tangente mit gleicher Steigung. ( )

d) Die Funktion f hat genau dann ein lokales Maximum in c, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich D_f gilt: $f(x) \leq f(c)$. ( )

e) Eine notwendige Bedingung für ein lokales Maximum im Innern des Definitionsbereichs einer differenzierbaren Funktion ist, dass die erste Ableitung an der betreffenden Stelle Null ist . ( )

---

[10] SS03 Die für alle x definierte Funktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\, dy$$

hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die x-Koordinate dieses Wendepunktes.

x-Koordinate des Wendepunktes: $\boxed{}$

---

[11] SS03 Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 e^{-x}$ auf $[0, 6]$. Geben Sie jeweils die x-Koordinate der Extrempunkte an.

Maximum: $x = \boxed{}$ Minimum: $x = \boxed{}$

---

[12] SS03 Bestimmen Sie jeweils das Produktionsniveau Q^*, das den Gewinn

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

maximiert, wenn

a) $R(Q) = 1\,840Q,\ C(Q) = 2Q^2 + 40Q + 5\,000 \implies Q^* =$

b) $R(Q) = 1\,840Q,\ C(Q) = 2Q^2 + 1\,940Q + 5\,000 \implies Q^* =$

---

[13] SS03
Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Die zweite Ableitung hat keinerlei Bedeutung bei der Untersuchung lokaler Extrempunkte. ( )

b) Wenn in einem stationären Punkt c die 2. Ableitung negativ ist, so liegt ein lokales Maximum vor. ( )

c) Wenn in einem inneren Punkt des Defintionsbereiches D der Funktion f die beiden ersten Ableitungen verschwinden, so kann kein Extrempunkt vorliegen. ( )

d) In einem lokalen Maximum-Punkt c gilt: $f''(c) \leq 0$. ( )

e) $f''(c) \geq 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein lokales Minimum in c. ( )

---

[14] WS04 Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

hat genau zwei Wendepunkte. Bestimmen Sie die x-Koordinaten $x_{1,2}$ der Wendepunkte.

$x_1 =$ $x_2 =$

---

[15] WS04 Die Funktion f sei für alle x definiert durch

$$f(x) = \frac{10(x-4)}{x^2+9}$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f, indem Sie die x-Koordinaten in dem linken Kästchen untereinander auflisten. Geben Sie dann in dem rechten Kästchen in der gleichen Reihenfolge an, um welchen Typ (Maximum, Minimum, kein Extrempunkt) eines stationären Punktes es sich handelt.

Die Funktion hat einen stationären Punkt in

$x =$ ☐ Typ ☐

---

[16] WS04 Ein Unternehmen produziere $Q(L) = 6L^2 - 0.2L^3$ Einheiten, wenn es L Beschäftigte einsetzt. Bestimmen Sie die Anzahl L^* der Beschäftigten, die die Produktion maximiert.

$L^* =$ ☐

---

[17] WS04 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Wenn eine Funktion in einem beschränkten Intervall einen Extrempunkt in einem Endpunkt des Intervalls hat, so kann die Ableitung an dieser Stelle ungleich Null sein. ( )

b) Jede in einem offenen Intervall stetige Funktion f hat dort einen Maximum- und einen Minimum-Punkt. ( )

c) Wenn eine Funktion in einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall ein Minimum hat, so kann dieses nur am Rand des Intervalls auftreten. ( )

d) Es ist möglich, dass eine stetige Funktion in einem inneren Punkt eines beschränkten Intervalls einen Extremwert annimmt, obwohl die Ableitung an dieser Stelle nicht existiert. ( )

e) Die Funktion f sei stetig in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall und differenzierbar im Innern des Intervalls. Zu jeder Sekante gibt es dann eine Tangente mit gleicher Steigung. ( )

---

[18] WS04, SS06K2M1 Bestimmen Sie den Bereich B, in dem die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 6$$

strikt konvex ist.

$B =$ $\boxed{}$

---

[19] SS04 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3\sqrt{4 - x^2}$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

$D_f =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f, indem Sie die x-Koordinaten in dem linken Kästchen untereinander auflisten. Geben Sie dann in dem rechten Kästchen in der gleichen Reihenfolge an, um welchen Typ (Lokales Maximum, Lokales Minimum, kein lokaler Extrempunkt) eines stationären Punktes es sich handelt. (**Hinweis:** Es reicht die Untersuchung der ersten Ableitung!)

Die Funktion hat einen stationären Punkt in

$x =$ $\boxed{}$ Typ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich R_f von f.

$R_f =$ $\boxed{}$

---

[20] SS04 Ein Unternehmen produziere $Q(L) = 6L^2 - 0.2L^3$ Einheiten, wenn es L Beschäftigte einsetzt. Die durchschnittliche Produktion (pro Beschäftigten) ist dann $Q(L)/L$. Bestimmen Sie die Produktionsmenge Q^*, die die durchschnittliche Produktion maximiert.

$Q^* =$ $\boxed{}$

---

[21] SS04
Bestimmen Sie die Zahlen a und b so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2$$

durch den Punkt $(1, 1)$ verläuft und an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt hat.

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$

---

[22] SS04 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Bedingung $f'(c) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = c$. ( )

b) Wenn $f'(c) = 0$, so ist c ein Extrempunkt der Funktion f. ( )

c) Jede konvexe Funktion hat ein Maximum. ( )

d) Wenn $f'(c) = 0$, so ist c ein stationärer Punkt der Funktion f. ( )

e) Wenn $f'(x) < 0$ auf beiden Seiten des stationären Punktes c, so ist c kein lokaler Extrempunkt der Funktion f. ( )

---

[23] WS05 Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

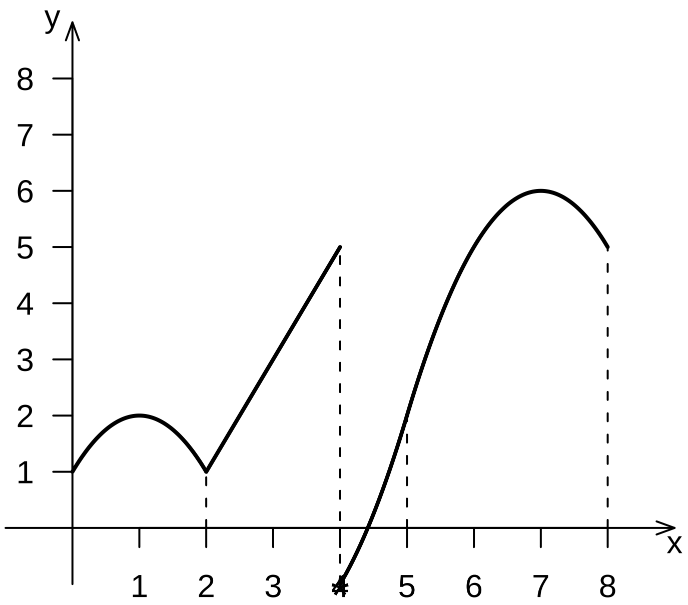
$$y = f(x) = 2x^2 - e^{x^2}$$

$x =$ $\boxed{}$

---

[24] WS05 Betrachten Sie die folgende zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & \text{für} \quad 0 \le x < 2 \\ 2x - 3 & \text{für} \quad 2 \le x < 4 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{für} \quad 4 \le x < 5 \\ -x^2 + 14x - 43 & \text{für} \quad 5 \le x \le 8 \end{cases}$$



DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Funktion $f(x)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = 1$ und ein globales Maximum an der Stelle $x = 7$. ( )

b) Die Funktion $f(x)$ hat einen stationären Punkt an der Stelle $x = 2$. ( )

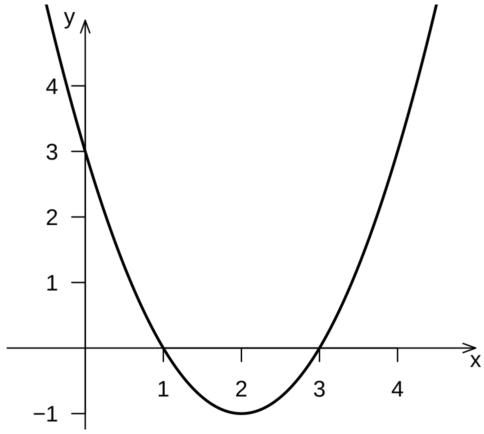
c) Es gilt $f''(5) = 0$. ( )

d) Die Funktion $f(x)$ ist stetig in den Intervallen $[1, 4)$ und $[4, 8]$. ( )

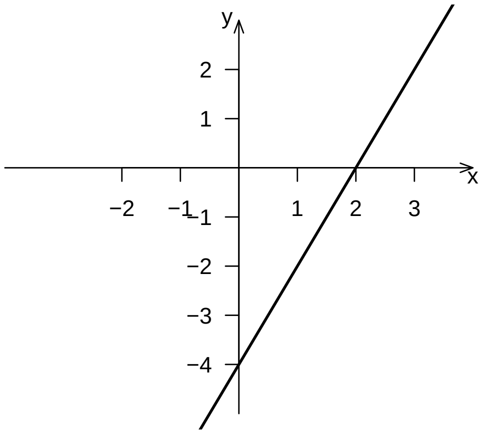
e) Im Intervall $[5, 8]$ sind die Voraussetzungen des Extremwertsatzes für die Funktion $y = f(x)$ erfüllt. ( )

[25] WS05
Die folgenden Graphiken zeigen die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$.

Graph der ersten Ableitung



Graph der zweiten Ableitung



a) Bestimmen Sie den Bereich, in dem die Ursprungsfunktion $f(x)$ konkav ist.

f ist konkav in

b) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der beiden lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie an, ob die Funktion dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.

$x =$ Max/Min

$x =$ Max/Min

[26] WS05 Die Funktion

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}$$

hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie beide Koordinaten $(x_0, f(x_0))$ dieses Wendepunktes.

Wendepunkt in $(x_0, f(x_0)) =$ $\boxed{}$

---

[27] SS05, SS08M1
Die Funktion

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$$

hat genau zwei Wendepunkte. Bestimmen Sie die x-Koordinaten dieser Wendepunkte.

$x_{1,2} =$ $\boxed{}$

---

[28] SS05 Im folgenden sei $c \neq 0$ eine Konstante. Die Funktion f_c ist dann für alle x definiert durch

$$f_c(x) = \left(x + \frac{1}{c}\right) e^{-cx}$$

Diese Funktion hat genau einen Extrempunkt.

a)Geben Sie die x-Koordinate und den Funktionswert $f(x)$ an.

$x =$ $\boxed{}$ $f(x) =$ $\boxed{}$

b) Die Entscheidung, ob es sich bei dem Extrempunkt, um einen Maxiumpunkt oder einen Minimumpunkt handelt, hängt vom Wert der Konstanten c ab. Es handelt sich um ein lokales

Maximum, falls c $\boxed{}$ Minimum, falls c $\boxed{}$

---

[29] SS05, SS08M1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Derjenige Punkt im Definitionsbereich einer Funktion f, in dem diese ihren größten Funktionswert annimmt, wird Maximumpunkt genannt. ( )

b) Eine Funktion f heißt konkav, falls der Streckenabschnitt, der zwei beliebige Punkte auf dem Graphen verbindet, unterhalb oder auf dem Graphen verläuft. ( )

c) Gilt für einen Punkt x_0 aus dem Definitionsbereich der Funktion f, dass $f(x_0) = 0$ ist, so nennt man x_0 einen stationären Punkt. ( )

d) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat keinen stationären Punkt, der ein Maximumpunkt ist. ( )

e) Eine Gerade mit der Steigung 2 besteht nur aus stationären Punkten, da die Steigung sich nirgends ändert. ( )

---

[30] (II06) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^2 - x^3$$

und bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion f strikt konvex bzw. strikt konkav ist. f ist

Strikt konvex in: $\boxed{}$ Strikt konkav in: $\boxed{}$

---

[31] (II06) Ein Anbieter produziert mindestens 30, kann jedoch nur maximal $Q_{max} = 100$ Mengeneinheiten seines Produktes herstellen. Die Kostenfunktion sei $C(Q) = 3Q + 280$. Der Verkaufspreis für eine Einheit des Produktes sei 12 Geldeinheiten. Bei welcher Produktionsmenge Q^* wird der Stückgewinn, d.h. der Gewinn pro Mengeneinheit maximiert.

$Q^* = \boxed{}$

---

[32] (II06) DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Funktion f sei definiert auf einem offenen Intervall und dort nicht stetig. Nach dem Extremwertsatz hat die Funktion dann kein Maximum und kein Minimum. ( )

b) In einem lokalen Extrempunkt im Innern des Definitionsbereiches einer differenzierbaren Funktion muss die erste Ableitung gleich Null sein. ( )

c) Ist f eine differenzierbare Funktion in dem Intervall I und c ein innerer Punkt von I, in dem ein lokales Minimum vorliegt, dann ist $f'(c) = 0$. ( )

d) Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist, dass $f''(c) = 0$ ist. ( )

e) Punkte, in denen eine Funktion aus einer konvexen in eine konkave Funktion übergeht oder umgekehrt, heißen Wendepunkte. ( )

---

[33] (II06) Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6$$

an. Geben Sie die x-Koordinate $f(x)$ an und geben Sie ferner an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Falls eine oder mehrere Zeilen überflüssig sein sollten, streichen Sie diese bitte und schreiben Sie eine kurze Begründung, warum es keine weiteren Extrempunkte geben kann.

$x =$ $\boxed{}$ Min/Max: $\boxed{}$

$x =$ $\boxed{}$ Min/Max: $\boxed{}$

$x =$ $\boxed{}$ Min/Max: $\boxed{}$

Falls Zeile(n) gestrichen:

Begründung: $\boxed{}$

---

[34] (IV06)
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) An der Stelle $x = c$ liegt ein Wendepunkt der Funktion f vor, wenn die erste Ableitung an der Stelle $x = c$ ihr Vorzeichen wechselt. ( )

b) Geht eine zweimal differenzierbare Funktion von einer Rechts- in eine Linkskurve über, so liegt ein Wendepunkt vor. ( )

c) Wenn $f''(c) = 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle $x = c$ vor, falls die zweite Ableitung dort auch das Vorzeichen wechselt. ( )

d) Wenn die in einem Intervall I zweimal stetig differenzierbare Funktion f einen Wendepunkt in einem inneren Punkt c des Intervalls I hat, so ist dort $f''(c) = 0$. ( )

e) Eine strikt konvexe Funktion kann kein Minimum haben. ( )

---

[35] (IV06) Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei

$$Q(A) = 8A^2 - \frac{1}{15}A^3 \qquad A \in [0, 100] \ ,$$

wobei A die Anzahl der Arbeitskräfte bezeichne. Welche Anzahl A^* von Arbeitskräften maximiert den Output $Q(A)$?

$A^* =$

---

[36] (IV06) Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte der Funktion $f(x) = e^{x^2} + e^{2-x^2}$, falls es welche gibt. Listen Sie in diesem Fall im linken Kästchen die x-Koordinaten der Extrempunkte auf und schreiben Sie in gleicher Reihenfolge in das rechte Kästchen die Art des Extrempunktes (Maximum oder Minimum).

$x =$ Art

---

[37] (IV06)
Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$y = f(x) = x^x \qquad (x > 0)$$

Hinweis: Schreiben Sie zunächst x^x mit Hilfe der Exponentialfunktion!

$x =$ $\boxed{}$

---

[38] (IV06) Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$$

hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die x-Koordinate dieses Wendepunktes.

$x =$ $\boxed{}$

---

[39] SS06, K2 Für welchen Wert der Konstanten c hat die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + cx + 3$$

einen stationären Punkt an der Stelle $x = 1$?

$c =$ $\boxed{}$

---

[40] SS06, K2 Gegeben sei die Kostenfunktion

$$C(x) = 6x^2 - 72x + 350 \qquad \text{mit } x \in [0, 20]$$

Bestimmen Sie diejenige Menge x^*, die die höchsten Kosten verursacht.

$x^* =$ $\boxed{}$

---

[41] SS06, K2 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Eine Funktion $y = f(x)$ ist genau dann strikt konvex im Intervall (a, b), wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. ( )

b) Eine Funktion $y = f(x)$ heißt strikt konkav, wenn der Streckenabschnitt, der zwei beliebige Punkte auf dem Graphen verbindet, strikt unterhalb des Graphen verläuft (abgesehen von den Endpunkten des Streckenabschnitts). ( )

c) Die Normalparabel $y = x^2$ ist strikt konvex. ( )

d) Die Gerade $y = x$ ist sowohl konvex als auch konkav. ( )

e) Der Punkt c ist genau dann ein Wendepunkt für die Funktion $y = f(x)$, wenn $f''(c) = 0$. ( )

---

[42] WDHWS03, SS06K2M1 Die Funktion f hat den Definitionsbereich $D_f = (-1, \infty)$. Sie hat **genau einen Extrempunkt und genau zwei Wendepunkte**. Bestimmen Sie den Extrempunkt, geben Sie an, ob es ein Maximum oder Minimum ist, und bestimmen Sie die Wendepunkte, wenn die erste Ableitung gegeben ist durch:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^3}{2(x+1)}$$

Extrempunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

Extrempunkt ist (Maximum oder Minimum) ? $\boxed{}$

Wendepunkte an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[43] WS04, SS06K2M1 Bestimmen Sie den Bereich B, in dem die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 6$$

strikt konvex ist.

$B =$ $\boxed{}$

---

[44] WS03M2, SS06K1M1 Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei

$$Q(A) = 9A^2 - \frac{1}{16}A^3 \qquad A \in [0, 100] \ ,$$

wobei A die Anzahl der Arbeitskräfte bezeichne.
a) Welche Anzahl A^* von Arbeitskräften maximiert den Output $Q(A)$?

$A^* =$ ☐

b) Welche Anzahl A^{**} maximiert den Output pro Arbeitskraft $Q(A)/A$?

$A^{**} =$ ☐

---

[45] WS03M1, SS06K1M1
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x} \ .$$

Bestimmen Sie die Extrempunkte, d.h. die x-Koordinaten der Extrempunkte und sagen Sie dazu, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Geben Sie bitte auch an, ob es ein lokaler oder sogar ein globaler Extrempunkt ist. **Hinweis:** Es gibt nicht mehr als zwei Extrempunkte. Bitte streichen Sie die zweite Lösungszeile, wenn es nur einen Extrempunkt gibt.

$x =$		Max/Min		Global/Lokal	
$x =$		Max/Min		Global/Lokal	

---

[46] SS06K1
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$ strikt konvex bzw. konkav ist.

Strikt konvex in

Strikt konkav in

---

[47] SS06, K1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann einen Extrempunkt in x_0, wenn die Bedingungen erster Ordnung für $x = x_0$ erfüllt sind. ( )

b) Eine strikt konkave Funktion kann im Innern eines Intervalls keinen Minimumpunkt haben. ( )

c) Falls c ein stationärer Punkt für die Funktion $y = f(x)$ ist und die Ableitung an der Stelle c ihr Vorzeichen wechselt, so ist c ein lokaler Extrempunkt von f. ( )

d) Eine stetige Funktion, die auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall definiert ist, kann ihr Maximum auch auf dem Rand des Intervalls annehmen. ( )

e) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann einen Wendepunkt an der Stelle x_0, wenn $f''(x_0) = 0$. ( )

---

[48] WS07, M1
Bei der Produktion eines Gutes fallen variable Kosten von 25 Geldeinheiten (GE) pro produzierter Einheit und jährliche fixe Kosten von 1 100 GE an. Der Preis, den das Unternehmen für x Einheiten des Gutes erzielt, variiert mit der nachgefragten Menge x wie folgt

$$p(x) = 45 - 0.02x$$

Ermitteln Sie den maximal erzielbaren Jahresgewinn.

Maximaler Jahresgewinn:

---

[49] WS07, M1
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = x^2e^{-x} + 0.75e^{-x}$$

alle möglichen Extremwerte, d.h. die x-Koordinaten der Extrempunkte und entscheiden Sie, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Geben Sie bitte auch an, ob es sich um einen globalen oder einen lokalen Extrempunkt handelt. Bitte streichen Sie die zweite Lösungszeile, wenn es nur einen Extrempunkt gibt.

$x =$		Global/Lokal:		Min/Max:	
$x =$		Global/Lokal:		Min/Max:	

---

[50] WS07, M1
Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte x_1 und x_2 und die zugehörigen Funktionswerte $y_1 = f(x_1)$ bzw. $y_2 = f(x_2)$ der Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

$(x_1, y_1) =$		$(x_2, y_2) =$	

---

[51] WS07, M1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Die Funktion f sei zweimal differenzierbar und c ein innerer Punkt von I.

a) Falls $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0$, ist c ein strikter lokaler Maximumpunkt. ( )

b) Falls $f'(c) = f''(c) = 0$, so kann c ein Maximumpunkt, Minimumpunkt oder auch ein Wendepunkt sein. ( )

c) Der Punkt c ist ein lokaler Maximumpunkt, wenn f' in c das Vorzeichen wechselt. ( )

d) Falls $f'(c) = 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \neq c$, so ist $x = c$ kein lokaler Extrempunkt für f. ( )

e) Falls c ein lokaler Maximumpunkt für f ist, gilt $f''(c) \geq 0$. ( )

---

[52] WS03M2, WS07M1

Durch die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten eines Produkts hat ein Unternehmen die Erlöse

$$R(Q) = -0.0012Q^2 + 40Q$$

und die Kosten

$$C(Q) = 0.0008Q^2 + 4Q + 32\,000$$

Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Maximaler Gewinn: $\boxed{}$

---

[53] WS07, K1

Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte und Extremwerte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 4 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 2x^2 - 16x + 32 & \text{für} \quad 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Maximum für $x =$ $\boxed{}$ Maximalwert: $\boxed{}$

Minimum für $x =$ $\boxed{}$ Minimalwert: $\boxed{}$

---

[54] WS07, K1

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$. Geben Sie jeweils x und $y = f(x)$ an und schreiben Sie in das zweite Kästchen den Typ des stationären Punktes (lokales (globales) Maximum (Minimum) oder kein Extrempunkt).

$(x, y) =$ $\boxed{}$ Typ: $\boxed{}$

$(x, y) =$ $\boxed{}$ Typ: $\boxed{}$

---

[55] WS07, K1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Eine differenzierbare Funktion hat ein globales Maximum an der Stelle $x = c$, wenn die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x = c$ das Vorzeichen wechselt. ( )

b) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \leq c$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \geq c$, so ist c ein globaler Minimumpunkt. ( )

c) Wechselt die erste Ableitung an der Stelle $x = c$ das Vorzeichen, so ist $x = c$ ein lokaler Extrempunkt. ( )

d) Falls f eine konvexe Funktion in einem Intervall I ist und falls c ein stationärer Punkt im Innern von I ist, so ist c ein Maximumpunkt. ( )

e) Ist f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$, so hat f in $[0, 1]$ einen Maximum- und einen Minimumpunkt. ( )

---

[56] WS07K2

Der Preis P eines Gutes, sowie die Gesamtkosten C für die Produktion hängen von der Nachfrage Q ab.

$$P(Q) = 40 - 0.002Q \qquad\qquad C(Q) = 0.003Q^2 + 10Q + 6\,800$$

Geben Sie denjenigen Wert Q^* an, der den Gewinn maximiert. Geben Sie außerdem den maximalen Gewinn $\pi(Q^*)$ an.

$Q^* =$ $\boxed{}$ $\qquad \pi(Q^*) =$ $\boxed{}$

---

[57] WS07K2

Die Kostenfunktion für die Herstellung von x Einheiten eines Gutes sei gegeben durch

$$K(x) = x\sqrt{x} + 500$$

Bei welcher Produktionsmenge x_0 werden die Stückkosten $k(x) = K(x)/x$, d.h. die durchschnittlichen Kosten für die Herstellung einer Einheit des Gutes minimal? Setzen Sie die Existenz eines Minimumpunktes einfach voraus.

$x_0 =$ $\boxed{}$

---

[58] WS07K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Die Funktion f sei zweimal stetig differenzierbar in einem Intervall $I = (a, b)$.

a) Ein Wendepunkt der Funktion f ist immer auch ein lokaler Extrempunkt für f'. ( )

b) Falls $f''(c) = 0$ in einem inneren Punkt des Intervalls I, so ist $x = c$ ein Wendepunkt. ( )

c) Die Funktion f ist genau dann strikt konvex, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. ( )

d) Ist $x = c$ ein Wendepunkt, so geht die Funktion f von einer konvexen in eine konkave Funktion über oder umgekehrt. ( )

e) Bei dem Graphen einer konvexen Funktion spricht man von einer Linkskurve. ( )

---

[59] IV07M1

Bestimmen Sie die Zahlen a und b so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2$$

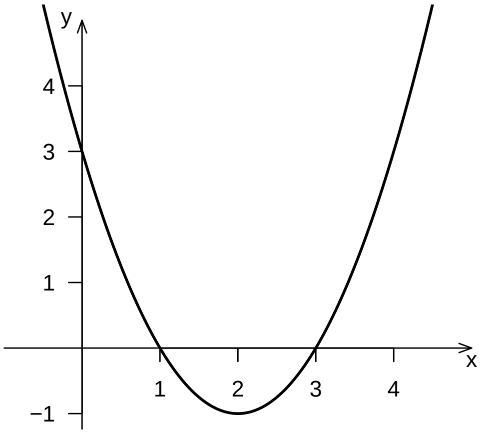
durch den Punkt $(1, 1)$ verläuft und an der Stelle $x = 2/3$ einen Wendepunkt hat.

$a =$ $\boxed{}$ $b =$ $\boxed{}$

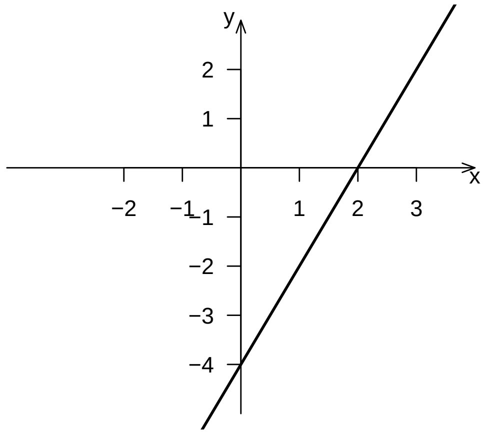
---

[60] WS05, IV07M1
Die folgenden Graphiken zeigen die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$.

Graph der ersten Ableitung



Graph der zweiten Ableitung



a) Bestimmen Sie den Bereich, in dem die Ursprungsfunktion $f(x)$ konkav ist.

f ist konkav in

b) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der beiden lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie an, ob die Funktion dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.

$x =$ Max/Min

$x =$ Max/Min

[61] SS07K1
Geben Sie die Intervalle an, auf denen die Funktion

$$f(x) = -3x^3 + 14x^2 + 3x - 2$$

konvex bzw. konkav ist.

$f(x)$ ist konvex auf dem Intervall

$f(x)$ ist konkav auf dem Intervall

---

[62] SS07K1
Gegeben sind eine Preis-Absatz-Funktion

$$P(Q) = 20 - \frac{1}{2}Q$$

und eine Kostenfunktion

$$C(Q) = \frac{3}{4}Q^2 + 5Q + 7$$

Bestimmen Sie die Menge Q^*, die den Gewinn maximiert. Geben Sie den maximalen Gewinn $\pi(Q^*)$ an.

$Q^* =$ $\pi(Q^*) =$

---

[63] SS07K1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Alle Funktionen $y = f(x)$ seien zweimal stetig differenzierbar in einem Intervall I und c sei ein innerer Punkt von I.

a) Die Funktion $y = x^3$ hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$. ( )

b) Falls $f''(c) = 0$, so hat die Funktion einen Wendepunkt an der Stelle c. ( )

c) Falls c ein Wendepunkt für f ist, so gilt $f''(c) = 0$. ( )

d) Die Funktion $y = x^4$ hat keinen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$, obwohl dort $f''(0) = 0$. ( )

e) $f''(c) = 0$ ist eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle c. ( )

---

[64] SS07K2
Bestimmen Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} \qquad (x > 1)$$

das globale Maximum x^* und den zugehörigen Funktionswert $f(x^*)$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. Beantworten Sie schließlich die Frage, ob die Funktion ein globales Minimum besitzt mit **JA** oder **NEIN**.

$x^* =$ $\boxed{}$ $f(x^*) =$ $\boxed{}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ $\boxed{}$ Glob. Minimum: **JA/NEIN**? $\boxed{}$

---

[65] SS07K2
Falls die Funktion

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 20$$

einen Wendepunkt c hat, so geben Sie diesen bitte an. Streichen Sie das Kästchen andernfalls einfach durch.

$c =$ $\boxed{}$

---

[66] SS07K2
Die Kostenfunktion einer Firma lautet

$$C(Q) = 25Q^2 + 16Q + 400$$

Bestimmen Sie denjenigen **eindeutig bestimmten** Wert Q^*, der die Durchschnittskosten $A(Q) = C(Q)/Q$ minimiert.

$Q^* =$ $\boxed{}$

---

[67] SS07M1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f strikt konvex in (a, b). ( )

b) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f' streng monoton steigend in (a, b). ( )

c) Wenn f strikt konkav in (a, b), so ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. ( )

d) Wenn eine konvexe Funktion einen lokalen Extrempunkt hat, so ist dies ein lokaler Minimumpunkt. ( )

e) Nur differenzierbare Funktionen können konvex oder konkav sein. ( )

---

[68] WDHWS03, SS07M1

Ein Anbieter kann maximal $Q_{max} = 80$ Mengeneinheiten seines Produktes herstellen. Die Kostenfunktion sei $C(Q) = 3Q + 280$. Der Verkaufspreis für eine Einheit des Produktes sei 12 Geldeinheiten. Bei welcher Produktionsmenge Q^* wird der Stückgewinn, d.h. der Gewinn pro Mengeneinheit maximiert.

$Q^* =$ $\boxed{}$

---

[69] SS07M1

Die Funktion $f(x) = e^{x^2+2x}$ hat genau einen Minimumpunkt. Bestimmen Sie den Punkt x^*, an dem f das Minimum annimmt.

$x^* =$ $\boxed{}$

---

[70] WS08K1

Die Funktion $f(x)$ hat genau **einen** Wendepunkt. Bestimmen Sie diesen, wenn Ihnen die erste Ableitung von $f(x)$ gegeben ist durch

$$f'(x) = e^{3x^2+2x}.$$

Wendepunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[71] WS08K1
Bestimmen Sie die zweite Ableitung der folgenden Funktion

$$f(x) = -34x^3 + 136x^2 + x + 2.$$

Geben Sie an, für welche Werte von x die Funktion $f(x)$ **strikt** konvex bzw. **strikt** konkav ist.

$f''(x) =$ $\boxed{}$

f ist **strikt** konvex für $\boxed{}$

f ist **strikt** konkav für $\boxed{}$

---

[72] WS08K1
Sei

$$C(x) = 2x^2 + 12x$$

die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Menge x. Der Verkaufspreis sei $p = 50$. Welche Menge x sollte eingesetzt werden, um den Gewinn zu maximieren?

$x =$ $\boxed{}$

---

[73] WS08M1
Ein Unternehmen kann maximal 40 Einheiten eines Produkts pro Tag herstellen. Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seien $2Q^2 + 10Q + 200$. Der Preis pro Einheit sei 210 Euro. Berechnen Sie den maximalen **Stückgewinn** $\pi(Q)/Q$, wobei $\pi(Q)$ die Gewinnfunktion bezeichne.

Maximaler **Stückgewinn**: $\boxed{ \text{Euro}}$

---

[74] WS08M1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Die zweite Ableitung hat keinerlei Bedeutung bei der Untersuchung lokaler Extrempunkte. ( )

b) Wenn in einem inneren Punkt des Definitionsbereiches D der Funktion f die beiden ersten Ableitungen verschwinden, so kann kein Extrempunkt vorliegen. ( )

c) Wenn in einem stationären Punkt c die 2. Ableitung negativ ist, so liegt ein lokales Maximum vor. ( )

d) $f''(c) \geq 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein lokales Minimum in c. ( )

e) In einem lokalen Maximumpunkt c gilt: $f''(c) \leq 0$. ( )

---

[75] WS08M1
Bestimmen Sie die Zahlen a und b so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2$$

durch den Punkt $(1, 2)$ verläuft und an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt hat.

$a = \boxed{}$ $b = \boxed{}$

---

[76] WS08K2
Ein Unternehmen habe für die Herstellung von Q Einheiten eines Produkts folgende Kostenfunktion

$$C(Q) = 20 + 2Q^2$$

Der Preis, den das Unternehmen für eine Einheit des Gutes auf dem Markt erzielen kann, beträgt 36 Geldeinheiten. Berechnen Sie die Menge Q^*, die den Gewinn maximiert.

$Q^* = \boxed{}$

---

[77] WS08K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ein stationärer Punkt c ist ein lokaler Extrempunkt, wenn die erste Ableitung an der Stelle c das Vorzeichen wechselt. ( )

b) Ist der in a) erwähnte Punkt c der einzige stationäre Punkt, so ist c ein globaler Extrempunkt, wenn die erste Ableitung an der Stelle c das Vorzeichen wechselt. ( )

c) Eine konvexe Funktion hat immer ein Minimum. ( )

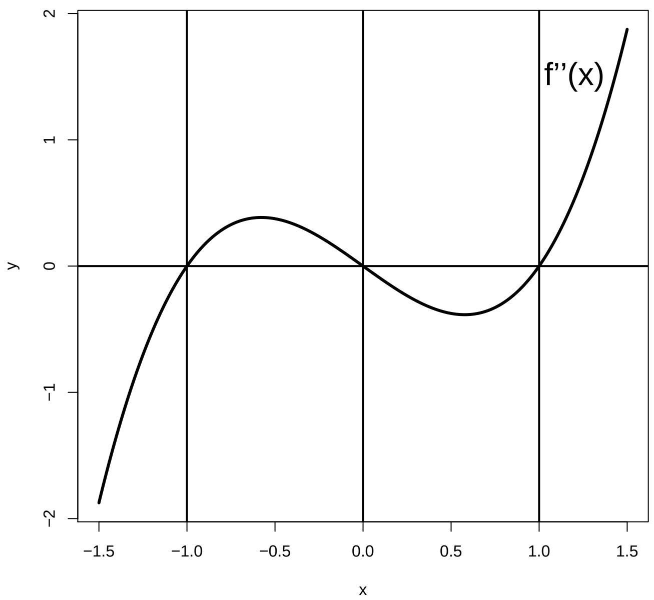
d) Ist c ein stationärer Punkt einer strikt konkaven Funktion, so ist c ein Maximumpunkt. ( )

e) Jede Parabel ist konvex. ( )

---

[78] WS08K2

Die folgende Graphik zeigt die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$.



Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Ursprungsfunktion $f(x)$ **konkav** ist.

$f(x)$ ist konkav in

---

[79] SS08K1
Die Funktion f hat genau zwei stationäre Punkte, von denen einer ein lokales Maximum, der andere ein lokales Minimum ist. Die Ableitung $f'(x)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$$

Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte.

Stationäre Punkte in $x =$ $\boxed{}$

Geben Sie jetzt an, an welcher Stelle a das lokale Maximum liegt.

Lokales Maximum in $a =$ $\boxed{}$

Geben Sie die zweite Ableitung f'' an der Stelle des lokalen Maximums an, d.h. gefragt ist nach $f''(a)$, wobei a die Stelle ist, an der das lokale Maximum angenommen wird.

$f''(a) =$ $\boxed{}$

---

[80] SS08K1
Die Funktion f hat genau einen Wendepunkt. Die Ableitung $f'(x)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$$

Bestimmen Sie die x-Koordinate des Wendepunktes.

Wendepunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[81] SS08K2
Die Kostenfunktion eines Unternehmens lautet

$$C(x) = 2x + \sqrt{x+34}$$

Aufgrund der Produktionstechnik können maximal 30 Gütereinheiten produziert werden. Geben Sie den Punkt x^* an, in dem maximale Kosten entstehen und geben Sie diese maximalen Kosten an.

$x^* =$ $\boxed{}$ $C(x^*) =$ $\boxed{}$

---

[82] SS08K2
Geben Sie bitte in dem Lösungskästchen an, ob die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$ konvex, strikt konvex, konkav oder strikt konkav ist.

$\boxed{}$

---

[83] SS08K2
Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 10$$

hat genau einen lokalen Minimumpunkt x_{min} und einen lokalen Maximumpunkt x_{max}. Bestimmen Sie diese.

Lokales **Minimum** in $x_{min} =$ $\boxed{}$

Lokales **Maximum** in $x_{max} =$ $\boxed{}$

---

[84] WS09K1
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Egal ob die Funktion f differenzierbar ist oder nicht, im Maximumpunkt hat sie immer eine horizontale Tangente. ( )

b) Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \leq a$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$, so hat die Funktion f an der Stelle a ein Minimum. ( )

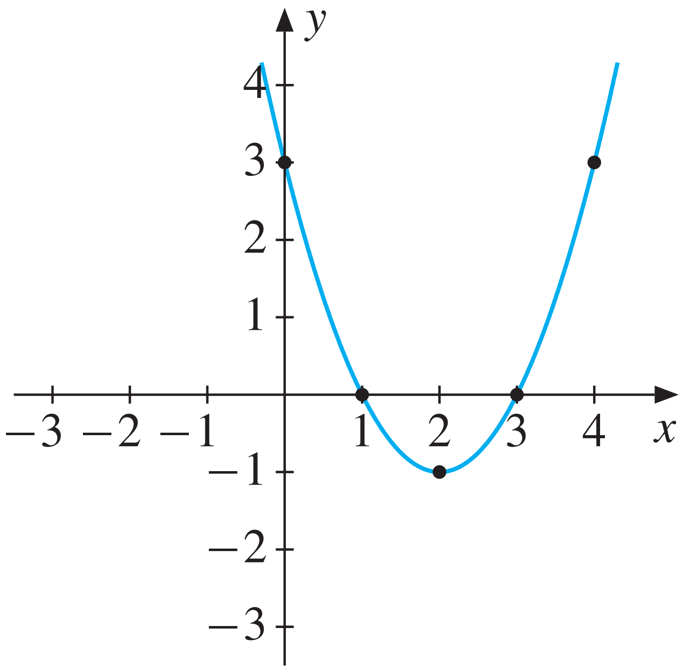
c) Die Funktion f hat einen globalen Extrempunkt an der Stelle a, wenn a die einzige Nullstelle von f' ist und f' an der Stelle a das Vorzeichen wechselt. ( )

d) Gilt $f'(a) = 0$, so hat die Funktion f an der Stelle a einen Extrempunkt. ( )

e) Das Maximum einer auf [a, b] stetigen Funktion kann auch in a oder b angenommen werden. ( )

---

[85] WS09K1
Die folgende Abbildung zeigt den **Graphen der Ableitung** einer Funktion $f(x)$. An welcher Stelle x^* hat die Funktion f ein lokales Minimum?



Graph der Ableitung

$x^* =$

---

[86] WS09K1

Die Funktion $f(x) = 3x^5 - 10x^4$ hat **genau einen** Wendepunkt x_0. Bestimmen Sie x_0.

$x_0 =$ $\boxed{}$

---

[87] WS09K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Die Endpunkte eines Intervalls $[a, b]$ sind niemals lokale Extrempunkte einer Funktion f. ( )

b) Gilt $f'(x_0) = 0$ für einen Punkt $x_0 \in (a, b)$, so kann man allein mit Hilfe des Funktionswertes $f(x_0)$ entscheiden, ob dieser Punkt ein lokaler Extrempunkt ist. ( )

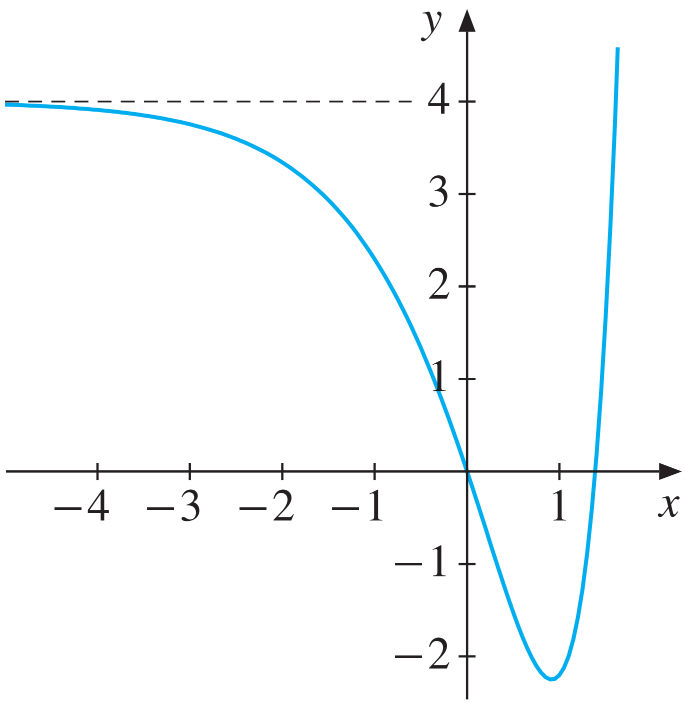
c) Ist die auf $[a, b]$ definierte Funktion f in (a, b) differenzierbar, so kommen als lokale Extrempunkte von f nur die Endpunkte a und b sowie die stationären Punkte von f in (a, b) in Frage. ( )

d) Auch ein innerer Punkt $x_0 \in (a, b)$, in dem die Funktion f nicht differenzierbar ist, kann ein lokaler Extrempunkt sein. ( )

e) Die Funktion $f(x) = |x|$ hat ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$, obwohl die Funktion f dort nicht differenzierbar ist. ( )

---

[88] WS09K2
Die folgende Abbildung zeigt den **Graphen der Ableitung** einer Funktion $f(x)$. An welcher Stelle x^* hat die Funktion f ein lokales Maximum?



Graph der Ableitung

$x^* =$ $\boxed{}$

[89] SS09K2
Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte der Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 9x$$

für $x \in [-4, 4]$.

Geben Sie dazu auch die jeweiligen Extremwerte an.

Minimum in $\boxed{}$ **Minimalwert** = $\boxed{}$

Maximum in $\boxed{}$ **Maximalwert** = $\boxed{}$

---

[90] **SS09K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *globalen Extrempunkten.*

a) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann einen globalen Extrempunkt an der Stelle x_0, wenn die erste Ableitung $f'(x)$ dort das Vorzeichen wechselt.

b) Die Funktion $y = f(x)$ hat einen Maximumpunkt in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) < 0$ für alle anderen x aus dem Definitionsbereich von f.

c) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f'(x) > 0$ für alle anderen x aus dem Definitionsbereich von f, so hat die Funktion keinen Extrempunkt in x_0.

d) Hat die Funktion einen globalen Extrempunkt in x_0, so gilt $f''(x_0) \neq 0$.

e) Eine konvexe Funktion kann nur ein Minimum haben.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,e	a,c,e	b,c,d	b,c,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[91] SS09K1
Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte der Funktion

$$y = f(x) = 3x^3 \ln(x) \qquad \text{für} \quad x > 0$$

Wenn die Funktion **kein** Maximum oder **kein** Minimum hat, so streichen Sie das entsprechende Kästchen durch.

Runden Sie das Ergebnis auf **drei Stellen nach dem Dezimalpunkt**.

Minimum in

Maximum in

---

[92] SS09K1
Bestimmen Sie die x-Koordinaten aller Wendepunkte der Funktion

$$y = f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$$

Wendepunkt(e) in $x =$

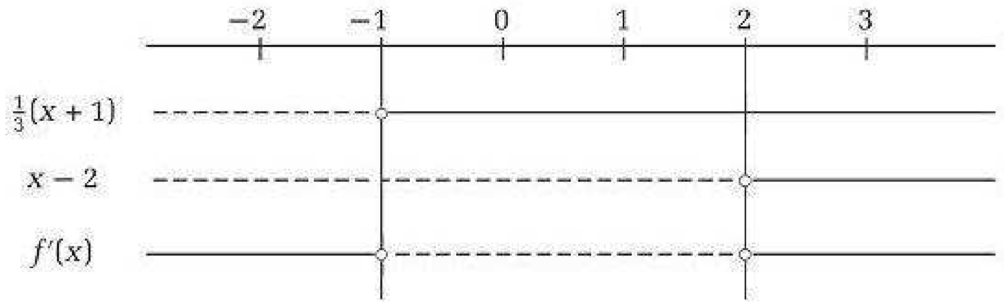
Ist die Funktion vor dem Wendepunkt **konkav** oder **konvex**?

Vorher **Konkav** oder **Konvex**?

---

[93] SS09K1
Die Abbildung zeigt ein Vorzeichendiagramm für die erste Ableitung einer Funktion f.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)$$



Bestimmen Sie die x-Koordinaten des lokalen Minimumpunktes und des lokalen Maximumpunktes.

Lokales Minimum in $x =$ $\boxed{}$

Lokales Maximum in $x =$ $\boxed{}$

[94] **X09M1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Extrem- und Wendepunkten.*

a) Die Funktion f sei definiert auf einem offenen Intervall und dort nicht stetig. Nach dem Extremwertsatz hat die Funktion dann kein Maximum und kein Minimum.

b) In einem lokalen Extrempunkt im Innern des Definitionsbereiches einer differenzierbaren Funktion muss die erste Ableitung gleich Null sein.

c) Ist f eine differenzierbare Funktion in dem Intervall I und c ein innerer Punkt von I, in dem ein lokales Minimum vorliegt, dann ist $f'(c) = 0$.

d) Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist, dass $f''(c) = 0$ ist.

e) Punkte, in denen eine Funktion aus einer konvexen in eine konkave Funktion übergeht oder umgekehrt, heißen Wendepunkte.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,c,e	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[95] **WS10K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Extrempunkten bei Funktionen* $y = f(x)$*einer Variablen.*

a) Der Extremwertsatz garantiert, dass eine auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall definierte differenzierbare Funktion einen stationären Punkt im Innern des Intervalls hat.

b) Ein stationärer Punkt einer differenzierbaren Funktion muss nicht unbedingt ein Extrempunkt sein.

c) Wenn c ein innerer Punkt eines Intervalls I ist, auf dem die Funktion f differenzierbar ist, so gilt: Wenn c ein Maximumpunkt für f ist, so ist c ein stationärer Punkt für f.

d) Ein stationärer Punkt einer konvexen Funktion ist ein Maximumpunkt.

e) Wenn c ein innerer stationärer Punkt für die differenzierbare Funktion f ist, so ist c ein globaler Extrempunkt, wenn die erste Ableitung an der Stelle c (und nur dort) das Vorzeichen wechselt.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[96] WS10K1
Betrachten Sie die Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$$

Bestimmen Sie die x-Koordinaten der lokalen Extrempunkte und geben Sie dazu jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Lokale Extrempunkte in:

x-Koordinate	Art des Extrempunktes

[97] WS10K1
Betrachten Sie die Funktion

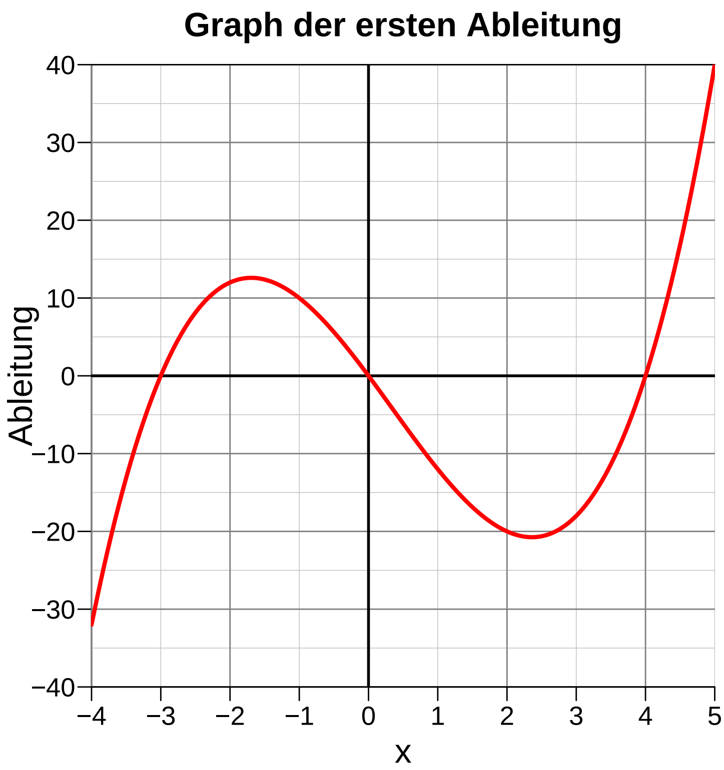
$$y = f(x) = xe^x$$

Falls die Funktion einen Wendepunkt hat, so geben Sie bitte die x-Koordinate dieses Wendepunktes an. Falls die Funktion keinen Wendepunkt hat, streichen Sie bitte dieses Kästchen durch.

Wendepunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

[98] WS10K2
Die folgende Abbildung zeigt den **Graphen der ersten Ableitung** einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $y = f(x)$.

Alle Nullstellen der ersten Ableitung sind in der Abbildung zu sehen.



Bestimmen Sie die x-Koordinaten der lokalen Extrempunkte und geben Sie dazu jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Lokale Extrempunkte in:

x-Koordinate	Art des Extrempunktes

[99] WS10K2
Die Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

hat genau einen **lokalen Minimumpunkt** x^*. Bestimmen Sie x^* und auch $f(x^*)$.

$(x^*, f(x^*)) =$ $\boxed{}$

---

[100] SS10,K1
Bestimmen Sie den stationären Punkt x^* der Funktion

$$y = f(x) = e^{x^2+4x+4}$$

$x^* =$ $\boxed{}$

Beantworten Sie in dem folgenden Kästchen die Frage, ob dieser Punkt

- ein **lokaler** Maximumpunkt oder ein **globaler** Maximumpunkt,
- ein **lokaler** Minimumpunkt oder ein **globaler** Minimumpunkt,
- überhaupt kein Extrempunkt ist.

$\boxed{}$

---

[101] SS10,K1
Betrachten Sie die Funktion

$$y = f(x) = xe^x$$

Geben Sie das Intervall I an, in dem die Funktion strikt konkav ist.

f ist strikt konkav in $I =$ $\boxed{}$

---

[102] SS10,K1
Falls die Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 8$$

einen Wendepunkt hat, so geben Sie bitte die x-Koordinate dieses Wendepunktes an.

Falls die Funktion keinen Wendepunkt hat, streichen Sie das Lösungskästchen bitte durch.

x-Koordinate des Wendepunktes: $\boxed{}$

---

[103] SS10,K2
Bestimmen Sie den stationären Punkt x^* der Funktion

$$y = f(x) = xe^x$$

$x^* =$

Beantworten Sie in dem folgenden Kästchen die Frage, ob dieser Punkt

- ein **lokaler** Maximumpunkt oder ein **globaler** Maximumpunkt,
- ein **lokaler** Minimumpunkt oder ein **globaler** Minimumpunkt,
- überhaupt kein Extrempunkt ist.

[104] **SS10,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *univariater Optimierung*.

a) Ist x^* ein stationärer Punkt der Funktion f, so ist x^* ein lokaler Extrempunkt.

b) Ein stationärer Punkt x^* ist genau dann ein lokaler Extrempunkt der Funktion f, wenn $f''(x^*) \neq 0$.

c) Ein stationärer Punkt x^* der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion f ist genau dann ein globaler Maximumpunkt, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \leq x^*$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \geq x^*$.

d) Ein globaler Extrempunkt ist stets auch ein lokaler Extrempunkt.

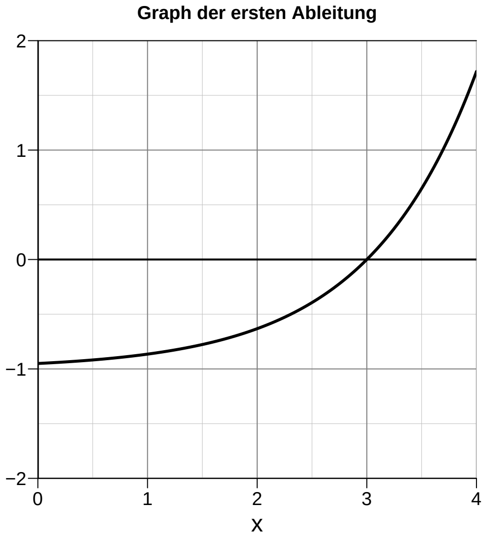
e) Als Extrempunkte einer auf einem Intervall $[a, b]$ definierten und in (a, b) differenzierbaren Funktion f kommen nur stationäre Punkte in Frage.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[105] WS11,K1
Die Funktion $y = f(x)$ hat genau einen Extrempunkt. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der ersten Ableitung.



Geben Sie die x-Koordinate des Extrempunktes an. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

$x =$ Maximum oder Minimum?

---

[106] WS11,K1
Bestimmen Sie den globalen Minimumpunkt der Funktion

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 4 \qquad \text{für} \quad x \in [0, 3]$$

Bestimmen Sie auch den Funktionswert, d.h. geben Sie $(x_{min}, f(x_{min}))$ an.

$(x_{min}, f(x_{min}))$

---

[107] WS11,K1
Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

hat genau einen stationären Punkt. Bestimmen Sie die x-Koordinate dieses Punktes.

$x =$ $\boxed{}$

Handelt es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder ist es ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente?

Antwort: $\boxed{}$

---

[108] **WS11,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *globalen Extrempunkten univariater Funktionen.*

a) Ein globaler Extrempunkt einer auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierten differenzierbaren Funktion ist entweder ein stationärer Punkt $x_0 \in (a, b)$ oder einer der Randpunkte a, b des Intervalls.

b) Ein stationärer Punkt ist immer ein globaler Extrempunkt.

c) Wechselt die erste Ableitung einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion genau einmal das Vorzeichen an der Stelle x_0, so ist x_0 ein globaler Extrempunkt.

d) Ist die zweite Ableitung einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion nichtnegativ, so ist ein stationärer Punkt ein Minimumpunkt.

e) Ein stationärer Punkt einer konvexen Funktion kann nur ein Maximumpunkt sein.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[109] WS11,K2
Bestimmen Sie den globalen Maximumpunkt der Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 32 \qquad \text{für} \quad x \in [3, 6]$$

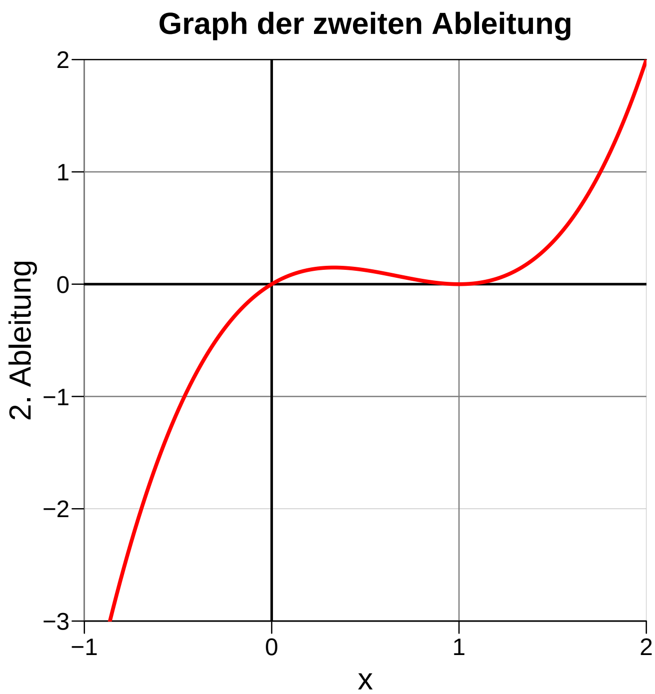
Bestimmen Sie auch den Funktionswert, d.h. geben Sie $(x_{max}, f(x_{max}))$ an.

$$(x_{max}, f(x_{max})) = \boxed{}$$

---

[110] WS11,K2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der zweiten Ableitung einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $y = f(x)$.



Geben Sie die x-Koordinate(n) des(r) Wendepunkte(s) an.

$x =$

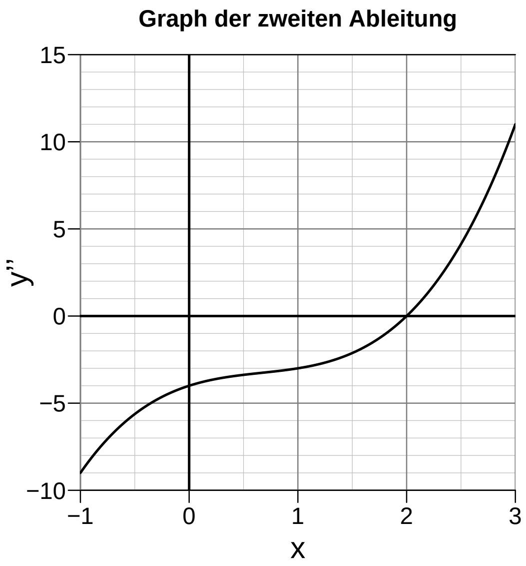
In welchem **Intervall** ist die Funktion konkav?

Hinweis: Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und alle Nullstellen der 2. Ableitung sind in der Abbildung zu sehen.

Konkav im **Intervall**

[111] SS11,K1

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ einer auf $[-1, 3]$ definierten Funktion $y = f(x)$.



In welchem **offenen Intervall** I ist die Funktion f **strikt konkav**?

f ist strikt konkav in $I =$ $\boxed{}$

---

[112] SS11,K1

Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte und die zugehörigen Extremwerte der Funktion

$$f(x) = e^{x^2-2x+1} \qquad x \in [0, 1]$$

Maximum: $(x_{max}, f(x_{max})) =$ $\boxed{}$

Minimum: $(x_{min}, f(x_{min})) =$ $\boxed{}$

[113] SS11,K1
Bestimmen Sie den einzigen Wendepunkt der Funktion

$$f(x) = xe^x$$

Wendepunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[114] **SS11,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *konkaven und konvexen Funktionen sowie Wendepunkten.* Dazu sei die Funktion $f(x)$ definiert auf einem Intervall (a, b).

a) Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

b) Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f strikt konkav in (a, b).

c) Die Funktion f hat genau dann einen Wendepunkt in x_0, wenn $f''(x_0) = 0$.

d) Die Funktion $f(x) = x^4$ hat keinen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$.

e) Eine nach unten geöffnete Parabel ist konvex.

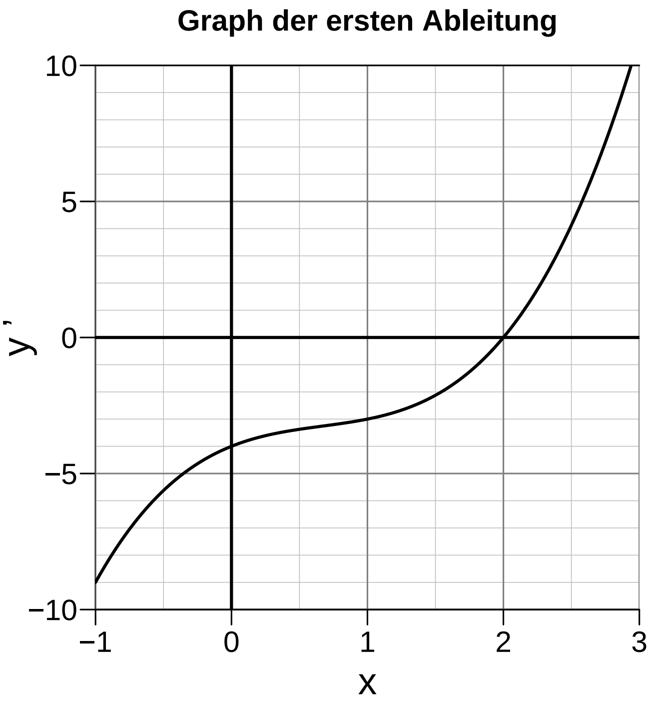
Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[115] SS11,K2
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ einer auf $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion $y = f(x)$. Alle Nullstellen der ersten Ableitung sind in dieser Abbildung zu sehen.



Falls f globale Extrempunkte hat, so geben Sie die x-Koordinate dieses Extrempunktes in der **korrekten Lösungszeile** an.

f hat ein **Maximum** an der Stelle $x_{max} =$

f hat ein **Minimum** an der Stelle $x_{min} =$

[116] SS11,K2
Die Funktion

$$f(x) = e^{x^2+2x+1}$$

hat **genau einen globalen Extrempunkt** x^*.

Bestimmen Sie x^* und tragen Sie das Ergebnis in der korrekten Zeile ein.

f hat globales **Maximum** an der Stelle $x^* =$ $\boxed{}$

f hat globales **Minimum** an der Stelle $x^* =$ $\boxed{}$

---

[117] WS11,K1
Die Funktion $y = f(x)$ sei für $x > 0$ definiert. Es gelte für die Ableitung

$$y' = f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

Die Funktion hat in ihrem **Definitionsbereich** $D = \{x : x > 0\}$ genau einen stationären Punkt $x^* > 0$.

Bestimmen Sie x^*. Ist es ein **Maximumpunkt, Minimumpunkt oder ein Sattelpunkt?**

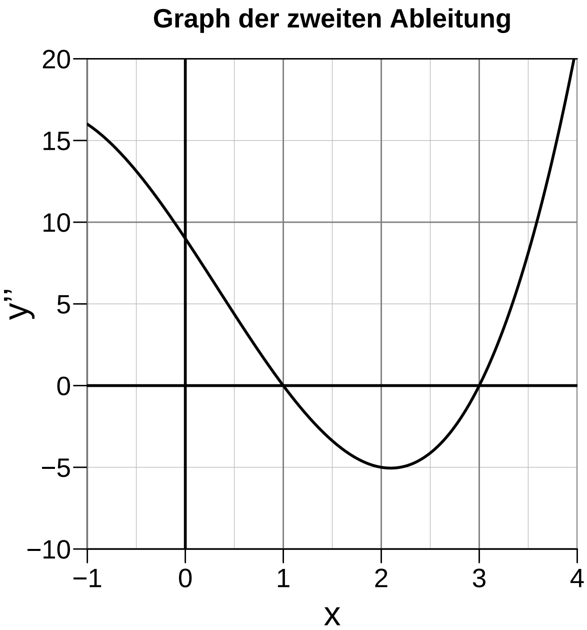
$x^* =$ $\boxed{}$

Maximum/Minimum/Sattelpunkt? $\boxed{}$

---

[118] WS11,K1

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der 2. Ableitung einer Funktion $f(x)$.



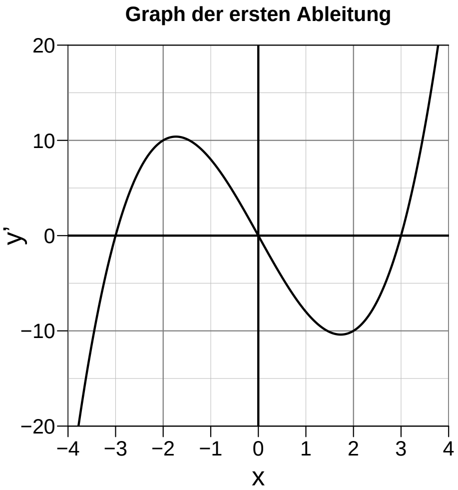
Bestimmen Sie den Punkt x_0, in dem die Funktion f von einer konvexen in eine konkave Funktion übergeht, d.h. gesucht ist derjenige Punkt x_0, für den gilt: Links von x_0 ist die Funktion konvex, rechts von x_0 ist die Funktion konkav.

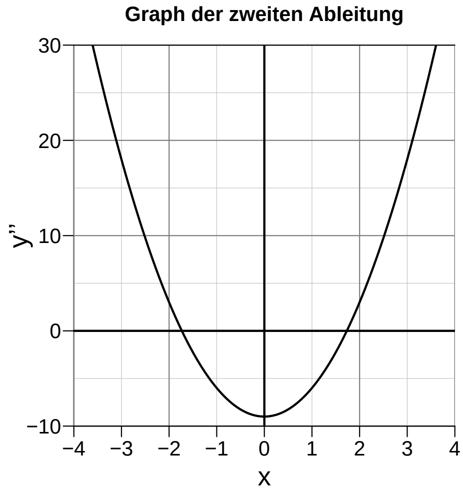
$x_0 =$ $\boxed{}$

---

[119] WS11,K2

Die folgende Abbildung zeigt die Graphen der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ und der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ einer Funktion $y = f(x)$.





Bestimmen Sie die x-Koordinaten der lokalen Minimum- bzw. lokalen Maximumpunkte von f.

f hat lokale **Minimum**stelle(n) in

f hat lokale **Maximum**stelle(n) in

[120] **WS11.K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *globalen Extrempunkten* einer auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierten Funktion $y = f(x)$.

a) Der stationäre Punkt x_0 ist genau dann ein globaler Extrempunkt, wenn $f''(x_0) \neq 0$.

b) Ist x_0 der einzige stationäre Punkt im Intervall I und wechselt $f'(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so ist x_0 ein globaler Extrempunkt.

c) Ist die Funktion $y = f(x)$ konvex im Intervall I, so ist ein stationärer Punkt ein Maximumpunkt.

d) Ist die Funktion $y = f(x)$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$, so nimmt sie dort ein Maximum und ein Minimum an.

e) Das Maximum einer auf $I = [a, b]$ stetigen Funktion ist nicht notwendig eindeutig bestimmt, d.h. das Maximum kann auch an zwei oder mehr Stellen angenommen werden.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[121] SS12,K1
Die Funktion

$$y = f(x) = \ln(x^2 - 6x + 11)$$

hat genau einen Minimumpunkt x_0.

Bestimmen Sie x_0.

$x_0 =$ $\boxed{}$

---

[122] SS12,K1
An welchen Stellen $x_{1,2}$ hat die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2/8} \qquad -\infty < x < \infty$$

Wendepunkte?

$x_{1,2} =$ $\boxed{}$

---

[123] SS12,K2
Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$$

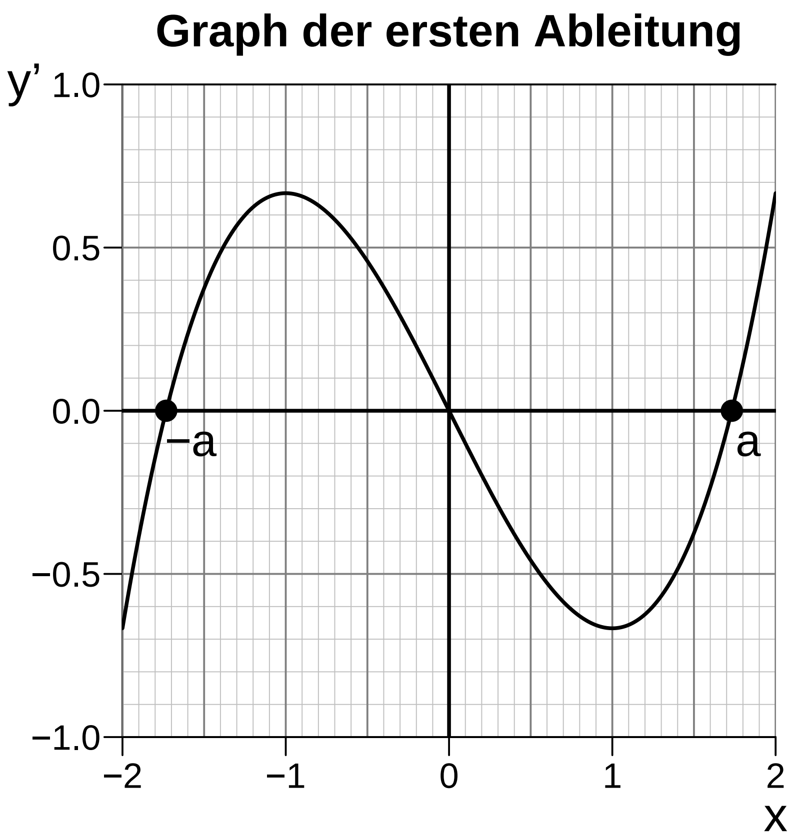
hat genau eine lokale Extremstelle x^*. Bestimmen Sie diese.

Hinweis: Die erste Ableitung $f'(x)$ hat genau zwei Nullstellen, die beide **ganzzahlig** sind.

$x^* =$ $\boxed{}$

---

[124] **SS12,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Optimierung einer univariaten Funktion* $y = f(x)$, deren Ableitung in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Die Funktion sei definiert auf $[-2, 2]$.



a) Nach dem Extremwertsatz besitzt die Funktion f einen Maximumpunkt und einen Minimumpunkt in $[-2, 2]$.

b) Kandidaten für globale Extrempunkte sind $-2, -a, 0, a$ und 2.

c) Das globale Maximum kann nicht in $-a$ und auch nicht in a angenommen werden.

d) An der Stelle 0 hat die Funktion ein lokales Minimum.

e) Das globale Minimum kann nur in einem der beiden Randpunkte angenommen werden.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[125] WS13,K1
Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

hat drei stationäre Punkte, von denen einer ein lokaler Maximumpunkt ist.

Bestimmen Sie die x-Koordinate x_{max} dieses lokalen Maximumpunktes.

Bestimmen Sie den Wert der 2. Ableitung an der Stelle x_{max}, d.h. bestimmen Sie $f''(x_{max})$.

Hinweis: Alle Nullstellen der 1. Ableitung sind **ganzzahlig**.

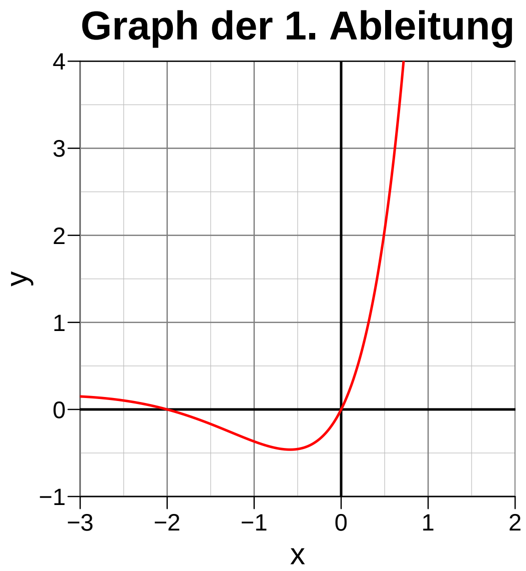
$x_{max} = \boxed{}$

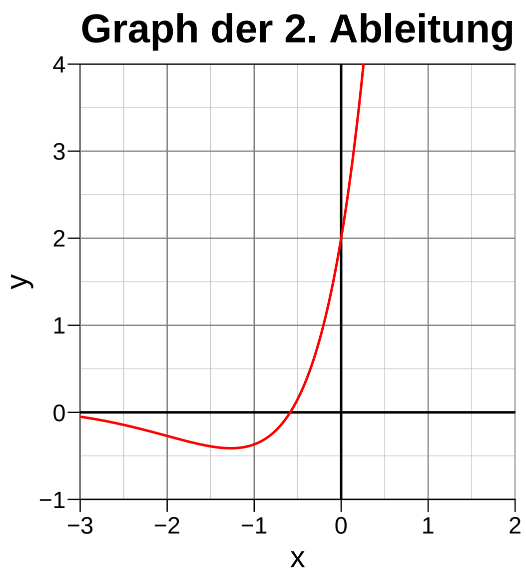
$f''(x_{max}) = \boxed{}$

---

[126] WS13,K1

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der ersten und zweiten Ableitung einer Funktion f.





Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte der Funktion f.

Lokales Maximum an der(n) Stelle(n) $x =$

Lokales Minimum an der(n) Stelle(n) $x =$

[127] WS13,K1
Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 6$$

und geben Sie an, ob es sich dabei um einen globalen oder lokalen Maximumpunkt oder Minimumpunkt handelt oder ob es kein Extrempunkt ist.

Stationäre(r) Punkt(e): $x =$ $\boxed{}$

Art des(r) stationären Punkte(s): $x =$ $\boxed{}$

---

[128] **WS13,K2** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Wendepunkten* einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$.

a) Ist die Funktion links von x_0 konvex und rechts von x_0 konkav, so hat sie einen Wendepunkt an der Stelle x_0.

b) Es gilt auch die Umkehrung der Aussage in a), d.h. wenn x_0 ein Wendepunkt ist, so ist die Funktion links von x_0 konvex und rechts von x_0 konkav.

c) Die Funktion hat genau dann einen Wendepunkt in x_0, wenn die zweite Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt.

d) Wenn $f''(x_0) = 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.

e) Wenn $f''(x) < 0$ für alle x aus einem Intervall I, so ist f strikt konkav auf I.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[129] WS13,K2
Die Funktion

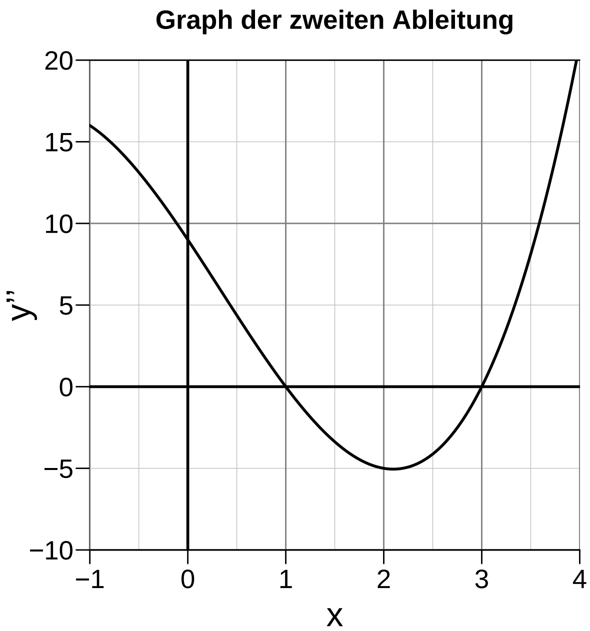
$$y = f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

ist stetig. Wenn wir diese Funktion **nur auf dem Intervall $[-2, 2]$ betrachten**, nimmt sie dort nach dem Extremwertsatz ein Maximum und ein Minimum an. Bestimmen Sie die Stellen x_{max} bzw. x_{min}, an denen das Maximum bzw. das Minimum angenommen wird und geben Sie auch die zugehörigen Extremwerte y_{max} und y_{min} an.

$(x_{max}, y_{max}) =$ $\boxed{}$ $(x_{min}, y_{min}) =$ $\boxed{}$

---

[130] WS13,K2
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der 2. Ableitung einer Funktion $f(x)$.



Bestimmen Sie ein **offenes** Intervall I, in dem die Funktion **strikt konkav** ist.

$I =$ $\boxed{}$
