Alte Klausuraufgaben zu Kap. 1

[1] **SS10,K1, Kap. 1, 74**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Wurzelrechnung*.

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

b) Für $a > 0$ gilt $a^{-1/2} = 1/\sqrt{a}$.

c) Für $a \geq 0$ und $b > 0$ gilt $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.

d) $\sqrt{9} = \pm 3$

e) $\sqrt{(-9) \cdot (-16)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[2] **WS11,K1, Kap. 1; 81**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Intervallen und Absolutbeträgen*.

a) Das Intervall $[-3, 3]$ enthält alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 3$.

b) Die Ungleichung $-2 < |x| \leq 2$ gilt genau dann, wenn $x \in (-2, 2]$.

c) Wenn $x > 0$, gilt $|x| = x$.

d) Das Intervall $[-4, 4)$ enthält alle x mit $-4 \leq x < 4$.

e) Wenn $|x| > |y|$, so gilt auch $x > y$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[3] **Punkte: 2; SS07K2; Kap. 1, 53**

Geben Sie im Lösungskästchen an, für welche x die folgende Ungleichung gilt:

$|5 - 3x| \leq 7$ gilt für:

---

[4] **Punkte: 2; SS11,K2; Kap. 1; 80**

Bestimmen Sie alle x, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x^2 - 7| < 29$$

Ungleichung gilt für

---

[5] **Punkte: 3; SS04, Kap. 1, Aufg. 21;**

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die die Ungleichung

$$|x^2 - 4| > 2$$

erfüllt ist.

Ungleichung ist erfüllt für:

Alte Klausuraufgaben. Kap. 2

[1] **Punkte: 3; WS10K2; Kap. 2; 58**

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung:

$$\big(\ln(x-3)\big)\cdot(e^x-100)\cdot(x-6)=0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$x =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 2; SS11,K1; Kap. 2; 65**

Schreiben Sie $2x^2+6x-8$ als Produkt von zwei linearen Faktoren und gegebenenfalls einer Konstanten.

$2x^2+6x-8 =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap.2, 67**

Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung zu $x^2 - 6x$, d.h. bestimmen Sie b^2, so dass

$$x^2 - 6x + b^2 = (x - b)^2$$

$b^2 =$ $\boxed{}$

---

[4] **SS09K2;Kap. 2; 54** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Lösen von Gleichungen.*

a) Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie die gleichen Lösungen haben.

b) Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten der Gleichung mit einer beliebigen reellen Zahl multipliziert.

c) Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten durch dieselbe Zahl $\neq 0$ dividiert.

d) Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten quadriert.

e) Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d
( )	( )	( )	( )	( )

Alte Klausuraufgaben. Kap. 3

[1] **Punkte: 2; WS09K1; Kap. 3; 55**

Eine Befragung von 200 Studierenden der Betriebswirtschaftslehre ergab, dass 100 von ihnen gerne die Mathematik-Vorlesung besuchen. 80 Studierende gaben an, gerne an der Statistik-Vorlesung teilzunehmen. 70 Studierende sagten aus, dass sie weder die Mathematik-Vorlesung noch die Statistik-Vorlesung gerne besuchen. Wie groß ist die Anzahl N der befragten Studierenden, die beide Vorlesungen gerne besuchen?

$N = \boxed{}$

---

[2] **X09M1;Kap. 3; 59**

Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Rechenregeln aus der Mengenlehre.* Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge Ω. Mit $n(A)$ werde die Anzahl der Elemente in der Menge A bezeichnet.

a) $n(A \cap B) \leq n(A)$

b) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

c) $n(A \cap B) = n(A)$, wenn $B \subseteq A$

d) $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$, wenn $B \subseteq A$

e) $n(A \cup \Omega) = n(\Omega)$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,d	a,b,e	a,d,e	b,d,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[3] **WS11,K1; Kap. 3; 69**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Logik*.

a) $x^2 > 0 \iff x > 0$

b) $x = 0$ und $y = 0 \iff x^2 + y^2 = 0$

c) $x = 0$ und $y = 0 \iff x^2 \cdot y^2 = 0$

d) $3x(x-2) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 2$

e) Aus $x^2 = 16$ folgt nicht $x = 4$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Übungsbuch: 3.5; Aufg. 1:

Zeigen Sie mit einem direkten und einem indirekten Beweis: Unter der Voraussetzung

$$x^2 + y^2 = 9$$

gilt:

$$\text{Aus } x^2 \geq 8 \text{ folgt } |y| \leq 1.$$

Lösung:
Direkter Beweis: Unter der Voraussetzung $x^2 + y^2 = 9$ gilt $y^2 = 9 - x^2$. Wenn $x^2 \geq 8$, gilt nach (1.6.5) $-x^2 \leq -8$ und nach (1.6.2) $y^2 = 9 - x^2 \leq 9 - 8 = 1$, d.h. $y^2 \leq 1 \iff |y| \leq 1$, was zu zeigen war.
Indirekter Beweis: Zu zeigen ist: Wenn $|y| \leq 1$ nicht gilt, gilt auch $x^2 \geq 8$ nicht. Wenn $|y| \leq 1$ nicht gilt, ist $|y| > 1$ und somit $y^2 > 1$. Dann ist nach (1.6.5) $-y^2 < -1$ und nach (1.6.2) $x^2 = 9 - y^2 < 9 - 1 = 8$, d.h. $x^2 \geq 8$ gilt nicht, was zu zeigen war.

Alte Klausuraufgaben. Kap. 4

[1] **Punkte: 4=2+2; WS08K2; Kap. 4, 102**

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-2x-4}}{(x^2+1)(x^2-4)} \quad \Rightarrow$$

Definitionsbereich: $\boxed{}$

$$g(x) = 5x - \ln\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad \Rightarrow$$

Definitionsbereich: $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 3; SS10,K2; Kap. 4; 134**

Lösen Sie die Gleichung

$$2^x 3^{x+1} = 12$$

nach x auf.

$x =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap. 4; 138**

Für welche(s) x gilt

$$\frac{e^{x+1}\ln(x+2)}{x^2+4} = 0 \ ?$$

$x =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WS11,K2 ; Kap. 4; 140**

Die kubische Funktion $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Bestimmen Sie die dritte Nullstelle x_3.

Dritte Nullstelle $x_3 =$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 2; SS11,K1; Kap. 4; 144**

Lösen Sie die Gleichung $e^{x^2-6x+9} = 1$.

$x =$ $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben; Kap. 5

[1] **Punkte: 4; SS07K1; Kap. 5, 45**
Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

Bestimmen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Als Ergebnisse werden **ganze Zahlen** erwartet.
Verwenden Sie keinen Taschenrechner, da dieser eventuell eine Fehlermeldung erzeugt!

$(f+g)(8) =$ $\boxed{}$ $\qquad (f \cdot g)(-1) =$ $\boxed{}$

$f(g(27)) =$ $\boxed{}$ $\qquad (g \circ f)(\sqrt{7}) =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 2; SS10,K2; Kap. 5, 66**

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \ln x$$

Für welche x ist die Verkettung $(f \circ g)(x)$ definiert?

Die Verkettung ist definiert für $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; SS10,K2 ; Kap. 5, 67**

Es sei

$$y = f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

Die zu f inverse Funktion sei mit $g(y)$ bezeichnet.

Bestimmen Sie $g(1/10)$.

$g(1/10) =$ $\boxed{}$

---

[4] **WS11,K1, Kap. 5, 68**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Umkehrfunktionen*.

a) Man erhält die Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x)$, indem man in der Formel $y = f(x)$ die Symbole x und y vertauscht.

b) Die Funktion $y = f(x)$ hat genau dann eine inverse Funktion, wenn sie umkehrbar eindeutig ist.

c) Hat die Funktion f eine inverse Funktion f^{-1}, so ist der Definitionsbereich von f^{-1} gleich dem Wertebereich von f und der Wertebereich von f^{-1} ist gleich dem Definitionsbereich von f.

d) Die Funktion $y = x^2$ hat die Umkehrfunktion $x = \pm\sqrt{y}$.

e) Eine zwar monoton wachsende, jedoch nicht streng monoton wachsende Funktion hat keine Umkehrfunktion.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[5] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 5, 69**

Bestimmen Sie die zu

$$y = f(x) = \ln x^2 + \ln x^3$$

inverse Funktion $g(y)$.

$$g(y) = \boxed{}$$

---

[6] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 5, 70**

Es sei

$$f(x) = 4x \qquad \text{und} \qquad g(x) = 3x - 2$$

Bestimmen Sie $f(g(x)) - g(f(x))$.

$$f(g(x)) - g(f(x)) = \boxed{}$$

---

[7] **Punkte: 2; WS11,K2;** **Kap. 5, 74**

Es sei

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

Bestimmen Sie $f(x+1)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$$f(x+1) = \boxed{}$$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 6

[1] **Punkte: 8; SS02; Kap. 6, 1**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} =$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} =$ $\boxed{}$

c) $\lim\limits_{h \to -\infty} \frac{(c+h)(c-h)}{h^2} =$ $\boxed{}$ (c reelle Konstante)

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\ln(1+x)} =$ $\boxed{}$ ($a; b$ reelle Konstanten.)

---

[2] **Punkte: 2; SS02, SS06K2M1; Kap. 6, 4**

Bestimmen Sie das Intervall I, das alle x enthält, für die die Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$$

konkav ist.

$I =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; (WDHWS03 + II06); Kap. 6, 6**

Die Funktion $f(x)$ sei stetig. Es gelte für eine andere Funktion $g(x)$ und $h \neq 0$:

$$f(x)h \leq g(x+h) - g(x) \leq f(x+h)h$$

Bestimmen Sie die Ableitung $g'(x)$.

$g'(x) =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WDHWS03, SS06K2M1; Kap. 6, 7**

Die Größe eines Bestandes zur Zeit t sei $B(t) = t^2 + 10t + 10$.

Berechnen Sie die relative Änderungsrate $\dot{B}(t)/B(t)$ zur Zeit $t = 1$.

$\dot{B}(t)/B(t)$ für $t = 1$: $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: ; WDHWS03; Kap. 6, 8**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{27+h} - 3}{h} \, .$$

Hinweis: Fassen Sie diesen Ausdruck als Grenzwert eines Differenzenquotienten auf.

Grenzwert: $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: ; WDHWS03; Kap. 6, 9**

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = \sqrt{(x^2+4)e^{2x}}$$

an der Stelle $x = 0$.

$f'(0) =$ $\boxed{}$

---

[7] **Punkte: 3; WS04; Kap. 6, 26**

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{e^{x-1}} + 1$$

an der Stelle $x = 1$.

Gleichung der Tangente: $\boxed{}$

---

[8] **Punkte: 2; SS04, SS06K1M1; Kap. 6, 27**

In der Definition der Ableitung einer Funktion f taucht der Differenzen- oder Newton-Quotient auf. Bestimmen Sie den Differenzen-Quotienten für die Funktion

$$f(x) = x(4x-3)$$

und **vereinfachen Sie diesen so weit wie möglich!**

Differenzen-Quotient: $\boxed{}$

---

[9] **SS09K2, Kap. 6, 130**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Exponential- und Logarithmusfunktionen.*

a) Die Funktion e^x ist konvex, während e^{-x} konkav ist.

b) Die für alle $x > 0$ definierte Funktion $\ln x$ ist strikt konkav.

c) Die Funktionen e^x und $\ln x$ sind gegenseitig invers zueinander.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$.

e) Die Funktion $\ln x$ ist streng monoton steigend.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,e	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[10] **SS11,K2; Kap. 6, 160**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *natürlichen Logarithmusfunktion* $g(x) = \ln x$.

a) Die natürliche Logarithmusfunktion $g(x) = \ln x$ ist streng monoton wachsend und konkav auf $(0, \infty)$.

b) Für $g(x) = \ln x$ gilt $g''(x) = 1/x^2$.

c) Wenn die Funktion $h(x)$ positiv und differenzierbar ist, ist die Ableitung von $y = \ln h(x)$ gleich der relativen Änderungsrate von h, d.h. $y' = h'(x)/h(x)$.

d) Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $\ln(xy) + \ln(x/y) = 2 \ln x = \ln(x^2)$

e) Für $x \to -\infty$ gilt $\ln x \to -\infty$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Alte Klausuraufgaben. Kap. 7

[1] **Punkte: 4; SS02; Kap. 7, 1**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{9 + x^4}$.

a) Bestimmen Sie das Differential df von f bezüglich x und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

$df =$ $\boxed{}$

b) Berechnen Sie approximativ mit Hilfe des Differentials die Änderung von $f(x)$, wenn sich x von 2 auf 2.1 ändert.

$\Delta f(2) \approx$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 3; WS07, M1; Kap. 7, 78**

Die durch

$$f(x) = \ln(3x + 1/2)$$

definierte Funktion hat eine Inverse g.

Bestimmen Sie die Ableitung der Inversen g an der Stelle $y_0 = 0$.

$g'(0) =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 3; WS07, M1; Kap. 7, 79**

Bestimmen Sie y' an der Stelle $(x, y) = (e, 0)$, wenn y implizit als differenzierbare Funktion von x durch die folgende Gleichung definiert ist:

$$2x^2y^3 - \ln x + e^{xy} = y$$

$y' =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 3; SS06K2, WS07M1; Kap. 7, 81**

Bestimmen Sie die quadratische Approximation für die Funktion

$$f(x) = (x^2 + 2x + 6)^2$$

um den Punkt $x = 0$.

$f(x) \approx$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 3; WS08M1; Kap. 7, 98**

Der Punkt $(2, 2)$ liegt auf dem Graphen der Gleichung

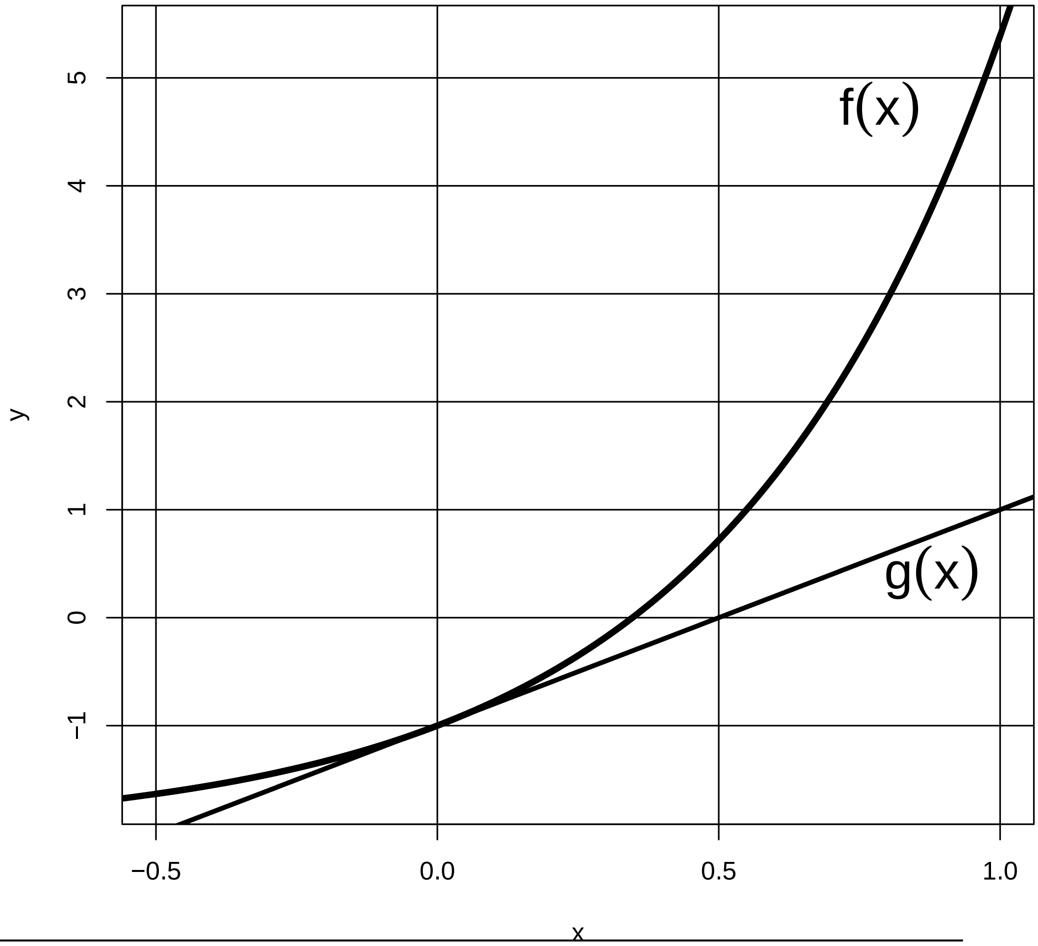
$$x^3 + y^3 = 4xy$$

Bestimmen Sie die Steigung y' der Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

Hinweis: Die Gleichung muss **implizit differenziert** werden.

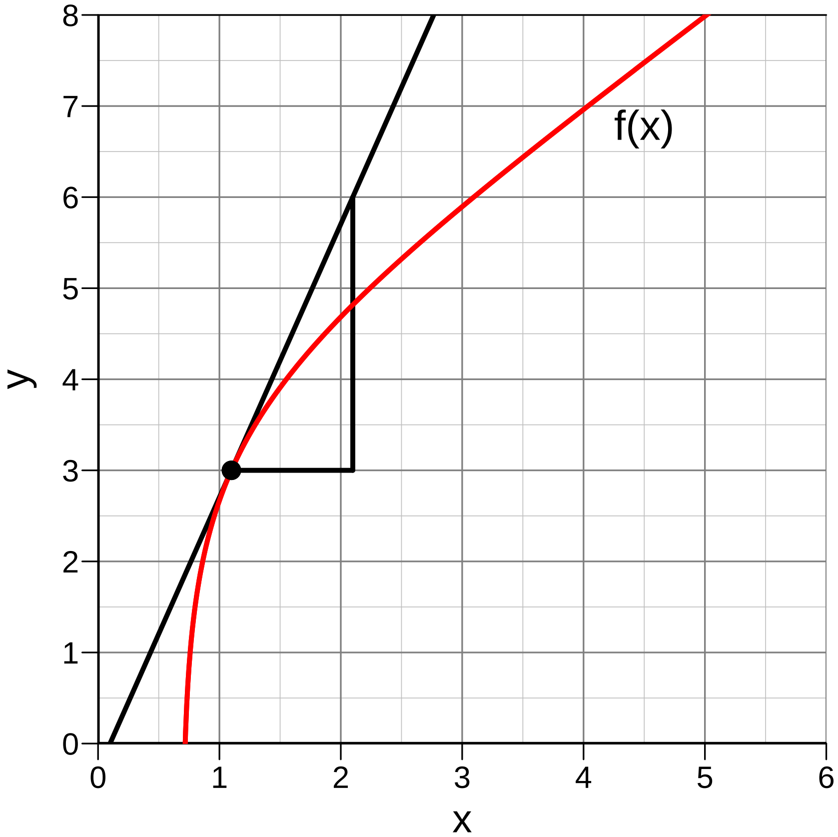
$y' = \boxed{}$

[6] **Punkte: 2; WS08K2; Kap. 7, 102**
Die in der folgenden Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ hat eine Nullstelle zwischen 0 und 1. Bestimmen Sie die Nullstelle, indem Sie das Newton-Verfahren aus der Vorlesung einmal anwenden und $x_0 = 0$ als Startpunkt verwenden.



---

[7] **Punkte: 2; SS09K1; Kap. 7, 120**
Die in der folgenden Abbildung dargestellte Funktion f ist streng monoton wachsend und hat daher eine Inverse g.



Bestimmen Sie die Ableitung der inversen Funktion g an der Stelle 3. Verwenden Sie das in der Abbildung dargestellte Steigungsdreieck für f an der Stelle $(\ln(3), 3)$ mit $\Delta x = 1$.

[8] **SS09K1, Kap. 7, 122**

Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Stetigkeit von Funktionen einer Variablen.*

a) Eine Funktion $y = f(x)$ ist (grob gesagt) stetig, wenn kleine Änderungen in x nur kleine Änderungen in y bewirken.

b) Die Summe und das Produkt stetiger Funtionen sind wiederum stetig.

c) Auch der Quotient zweier stetiger Funktionen ist ohne Einschränkung überall stetig.

d) Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn sie differenzierbar ist.

e) Eine Funktion ist genau dann stetig in einem inneren Punkt x_0, wenn sie dort stetig von links und stetig von rechts ist.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,b,e	b,c,e	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[9] **Punkte: 3; WS11,K2; Kap. 7, 152**

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{n^3 - n^2 + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{n^3 - n^2 + n} = \boxed{}$$

---

[10] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 7, 141**

Für welchen Wert von a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & 0 \leq x < 1 \\ 3x & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

stetig?

$a = \boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 8

[1] **Punkte: 4; WS03M2, SS06K1M1; Kap. 8, 1**
Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei

$$Q(A) = 9A^2 - \frac{1}{16}A^3 \qquad A \in [0, 100] ,$$

wobei A die Anzahl der Arbeitskräfte bezeichne.
a) Welche Anzahl A^* von Arbeitskräften maximiert den Output $Q(A)$?

$A^* =$ $\boxed{}$

b) Welche Anzahl A^{**} maximiert den Output pro Arbeitskraft $Q(A)/A$?

$A^{**} =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 5; WDHWS03, SS06K2M1; Kap. 8, 3** Die Funktion f hat den Definitionsbereich $D_f = (-1, \infty)$. Sie hat **genau einen Extrempunkt und genau zwei Wendepunkte**. Bestimmen Sie den Extrempunkt, geben Sie an, ob es ein Maximum oder Minimum ist, und bestimmen Sie die Wendepunkte, wenn die erste Ableitung gegeben ist durch:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^3}{2(x+1)}$$

Extrempunkt an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

Extrempunkt ist (Maximum oder Minimum) ? $\boxed{}$

Wendepunkte an der Stelle $x =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS03M1; Kap. 8, 7**

Ein Unternehmen kann maximal 40 Einheiten eines Produkts pro Tag herstellen. Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seien

$$2Q^2 + 10Q + 450$$

Der Preis pro Einheit sei 210 Euro. Berechnen Sie den maximalen **Stückgewinn**.

Maximaler **Stückgewinn**: Euro

---

[4] **Punkte: 4; WS03M1, SS06K1M1; Kap. 8, 8**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x} \ .$$

Bestimmen Sie die Extrempunkte, d.h. die x-Koordinaten der Extrempunkte und sagen Sie dazu, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Geben Sie bitte auch an, ob es ein lokaler oder sogar ein globaler Extrempunkt ist. **Hinweis:** Es gibt nicht mehr als zwei Extrempunkte. Bitte streichen Sie die zweite Lösungszeile, wenn es nur einen Extrempunkt gibt.

$x =$ Max/Min Global/Lokal

$x =$ Max/Min Global/Lokal

---

[5] **Punkte: 2; WS04; Kap. 8, 14**

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

hat genau zwei Wendepunkte.

Bestimmen Sie die x-Koordinaten $x_{1,2}$ der Wendepunkte.

$x_1 =$ $\boxed{}$ $x_2 =$ $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: 2; WS04; Kap. 8, 15**

Die Funktion f sei für alle x definiert durch

$$f(x) = \frac{10(x-4)}{x^2+9}$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f, indem Sie die x-Koordinaten in dem linken Kästchen untereinander auflisten. Geben Sie dann in dem rechten Kästchen in der gleichen Reihenfolge an, um welchen Typ (Maximum, Minimum, kein Extrempunkt) eines stationären Punktes es sich handelt.

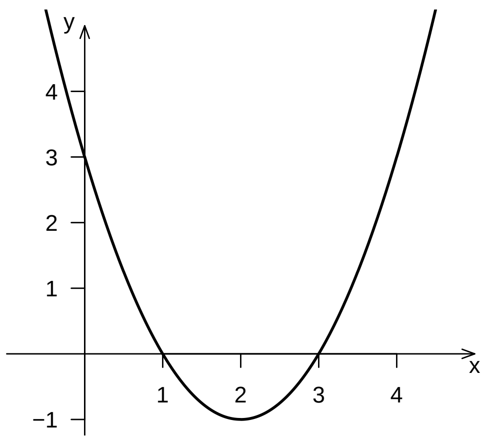
Die Funktion hat einen stationären Punkt in

$x =$ $\boxed{}$ Typ $\boxed{}$

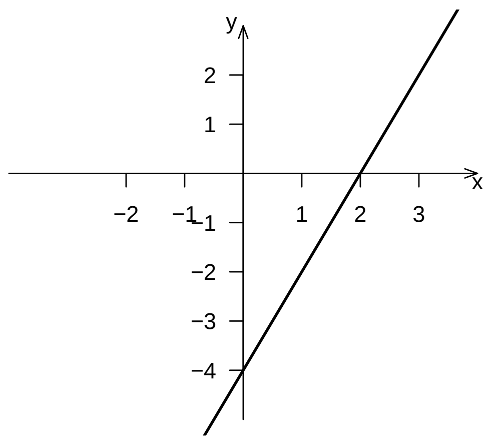
---

[7] **Punkte: 3; WS05; Kap. 8, 25**
Die folgenden Graphiken zeigen die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$.

Graph der ersten Ableitung



Graph der zweiten Ableitung



a) Bestimmen Sie den Bereich, in dem die Ursprungsfunktion $f(x)$ konkav ist.

f ist konkav in $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der beiden lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie an, ob die Funktion dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.

$x =$ $\boxed{}$ Max/Min $\boxed{}$

$x =$ $\boxed{}$ Max/Min $\boxed{}$

[8] **SS11,K2, Kap. 8, 114**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *konkaven und konvexen Funktionen sowie Wendepunkten.* Dazu sei die Funktion $f(x)$ definiert auf einem Intervall (a, b).

a) Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

b) Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f strikt konkav in (a, b).

c) Die Funktion f hat genau dann einen Wendepunkt in x_0, wenn $f''(x_0) = 0$.

d) Die Funktion $f(x) = x^4$ hat keinen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$.

e) Eine nach unten geöffnete Parabel ist konvex.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Alte Klausuraufgaben. Kap. 9

[1] **Punkte: 2; WDHWS03; Kap. 9, 4**

Bestimmen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$\int (7x^2 + 9x^3)\sqrt{x}\,dx =$ $\boxed{\qquad\qquad +C}$

---

[2] **Punkte: ; WDHWS03; Kap. 9, 6**

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

---

[3] **Punkte: 2; WS03M2; Kap. 9, 7**

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$\int\limits_0^\infty 2te^{-t}\,dt = \boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WS03M2, WS08M2; Kap. 9, 8**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\sqrt[3]{\ln(5)}} 3x^2 e^{x^3}\,dx = \boxed{}$$

---

[5] **Punkte: 2; WS03M1; Kap. 9, 14**

Berechnen Sie $\int\limits_0^1 4x(2x^2-1)^6\,dx$.

$\int\limits_0^1 4x(2x^2-1)^6\,dx =$ $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: 3; SS03, SS08M2; Kap. 9, 15**

Berechnen Sie

$$\int\limits_0^2 x2^x\,dx$$

$\int\limits_0^2 x2^x\,dx =$ $\boxed{}$

Hinweis: Rechnen Sie bitte den Funktionswert einer evtl. im Ergebnis vorkommenden ln-Funktion **nicht** aus!

---

[7] **Punkte: 3; SS03; Kap. 9, 16**

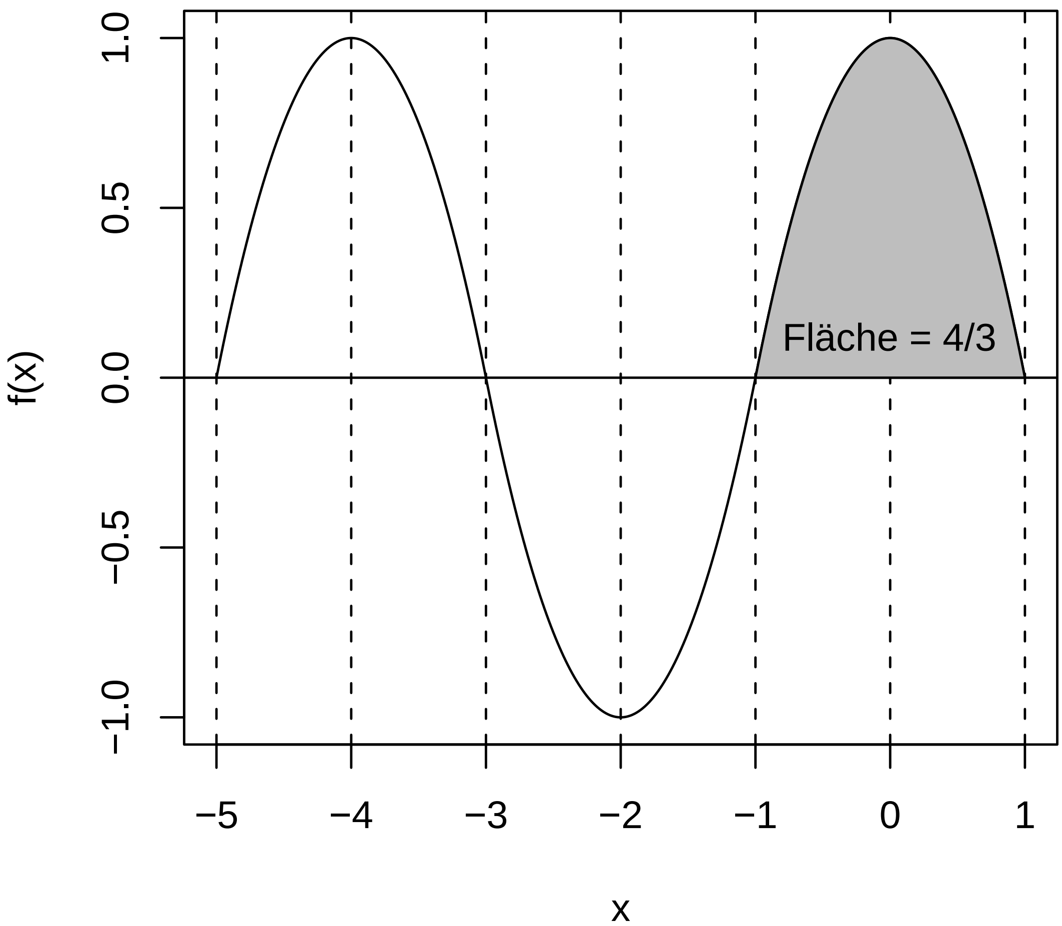
Berechnen Sie die **Fläche** F zwischen dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 6(x-3)(x+2)$$

und der x-Achse über dem Intervall $[-5, 5]$.

$F = \boxed{}$

[8] **Punkte: 3 = 1 + 2; WS04M1; Kap. 9, 19**
Betrachten Sie den in der folgenden Abbildung gegebenen Graphen der Funktion f. Die in der Abbildung grau markierte Fläche hat den Flächeninhalt 4/3.



Die Aufgabenstellung folgt auf der nächsten Seite:

[8] **Punkte: 3 = 1 + 2; WS04M1; Kap. 9, 19**

a) Geben Sie den Gesamtflächeninhalt F zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse über dem Intervall $[-5, 1]$ an.

$F = \boxed{}$

b) Geben Sie das folgende bestimmte Integral an. **HINWEIS:** Beachten Sie die Grenzen!

$\int\limits_{-4}^{1} f(x)\,dx = \boxed{}$

---

[9] **Punkte: 2; SS04M2; Kap. 9, 24**

Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie

$$u = x^2 + 9$$

substituieren. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

$\int\limits_{0}^{4} 7x\sqrt{x^2+9}\,dx = \boxed{}$

---

[10] **VIII09M2, Kap. 9, 113**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Regeln der Integralrechnung.*

a) $\int f(x)g'(x)\,dx = f'(x)g(x) + \int f'(x)g(x)\,dx$

b) $\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad (u = g(x))$

c) $\int\limits_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int\limits_a^b f(u)\,du \quad (u = g(x))$

d) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$

e) Das Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, falls der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ existiert.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	b,c,d	b,d,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Alte Klausuraufgaben. Kap. 10

[1] **Punkte: 3; SS09K1; Kap. 10, 69**

Entscheiden Sie ob die folgenden unendlichen Reihen geometrisch sind und bestimmen Sie die Summen derjenigen Reihen, die konvergieren.

> Sollte eine Reihe nicht konvergieren, schreiben Sie DIVERGIERT in das Kästchen.
>
> Sollte eine Reihe nicht geometrisch sein, schreiben Sie NICHT GEOMETRISCH in das Lösungskästchen.

Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Stellen nach dem Dezimalpunkt.

$1/8 - 1/16 + 1/24 - 1/32 + ... =$ $\boxed{}$

$e + 1 + e^{-1} + e^{-2} + ... =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap. 10, 79**

Wie viele Perioden n sind nötig, um einen Kredit der Höhe 500 Euro vollständig zu tilgen, wenn pro Periode 100 Euro zurückgezahlt werden und die Zinsrate $r = 0.05$ pro Periode ist?

Geben Sie n als **ganze Zahl** an!

$n =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 10, 81**

Bestimmen Sie die Summe S der unendlichen geometrischen Reihe

$$3,\ 3/4,\ 3/16,\ \ldots$$

$S =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; SS11,K2; Kap. 10, 85**

Ein Geldbetrag von 1 000 Euro wird pro Periode mit 3% verzinst.

Nach wie vielen **ganzen** Perioden N ist erstmals ein Betrag von mehr als 1 500 Euro auf dem Konto?

$N =$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 3; WS11,K1; Kap. 10, 86**

In welcher Zeit t_* verdoppelt sich ein Anfangskapital S_0 bei stetiger Verzinsung, wenn die jährliche Zinsrate $r = 0.1$ ist?

Runden Sie das Ergebnis auf drei Stellen nach dem Dezimalpunkt.

$t_* =$ $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap. 10, 87**

Berechnen Sie die Summe S_{10} der 10 ersten Summanden der geometrischen Reihe

$$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$$

$S_{10} = \boxed{}$

---

[7] **WS11,K2; Kap. 10, 88**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *geometrischen Reihen* mit dem Anfangswert a und dem Quotienten k.

a) Man spricht von einer geometrischen Reihe $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Zahlen x_{j+1}/x_j für alle $j = 1, 2, \ldots$ konstant ist.

b) Ist $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ eine geometrische Reihe, so gilt $x_3 = k \cdot x_2 = k^2 \cdot x_1$.

c) Für die Summe einer endlichen geometrischen Reihe gilt $a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a\frac{k-1}{k^n-1}$.

d) Für $k = \pm 1$ ist eine unendliche geometrische Reihe divergent.

e) Für die unendliche geometrische Reihe gilt die Summenformel $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \frac{a}{1-k}$, falls $k \neq 1$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Alte Klausuraufgaben. Kap. 11

[1] **Punkte: 3 = 2 + 1; SS07K1; Kap. 11, 73**

Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten von z bezüglich x und y:

$$z = f(x, y) = xy^2 e^{x^2}$$

$El_x z =$ $\boxed{}$ $El_y z =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 2; WS09K1; Kap. 11, 91**

Gegeben sei eine Cobb-Douglas-Funktion

$$F(x, y) = 4x^{1.5}y^{2.5}$$

An der Stelle (x_0, y_0) gelte $F(x_0, y_0) = 10$.

Wie groß ist $F(2x_0, 2y_0)$?

$F(2x_0, 2y_0) =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS10K1; Kap. 11, 101**

Der Punkt $(40, 10)$ liegt auf einer bestimmten Höhenlinie der Funktion

$$f(x, y) = 3\sqrt{x}\sqrt{y}$$

Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P = (x, y)$ auf dieser Höhenlinie, für den $x = y$ gilt.

$P =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WS10K2; Kap. 11, 105**

Betrachten Sie die Höhenlinie zum Niveau $c = 60$ der Produktionsfunktion

$$Q = F(K, L) = 3K^{1/2}L^{1/2}$$

Wie groß muss der Arbeitsinput L_0 sein, wenn der Kapitalinput $K_0 = 10$ ist, damit der Punkt $(K_0, L_0) = (10, L_0)$ auf der Höhenlinie $F(K, L) = 60$ liegt?

$L_0 =$ $\boxed{}$

---

[5] **WS10K2, Kap. 11, 106**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung* einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

a) Die Hesse-Matrix enthält alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und ist daher eine Matrix der Ordnung $2 \times n$.

b) Die Hesse-Matrix ist unter den in der Einleitung zu dieser Aufgabe genannten Annahmen für f symmetrisch.

c) Die Hesse-Matrix enthält in der Hauptdiagonalen die direkten partiellen Ableitung zweiter Ordnung, d.h. es wird zweimal bezüglich derselben Variablen abgeleitet.

d) Es folgt aus c), dass die Hauptdiagonale der Hesse-Matrix nur Nullen enthält.

e) Die Hesse-Matrix einer linearen Funktion $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ mit Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist eine Nullmatrix.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,d	a,c,e	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[6] **SS10,K1, Kap. 11, 107**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Funktionen von mehreren Variablen.*

a) Eine Funktion von n Variablen hat n partielle Ableitungen erster Ordnung und $2n$ partielle Ableitungen zweiter Ordnung.

b) Wenn alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind, spielt die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle.

c) Wenn alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind, ist die Hesse-Matrix symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

d) Die Höhenlinien einer Funktion $f(x, y)$ sind Teilmengen der (x, y)-Ebene.

e) Die partielle Elastizität einer Funktion $z = f(x, y)$ gibt ungefähr die prozentuale Änderung von x an, wenn z um 1% geändert wird.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[7] **Punkte: 2; SS10,K2; Kap. 1, 110**

Bestimmen Sie für die Funktion

$$z = f(x, y) = \ln(10 - x^2 - y^2)$$

die partiellen Ableitungen $f_1'(x, y)$ und $f_2'(x, y)$.

$f_1'(x, y) =$ $\boxed{}$ $\quad$ $f_2'(x, y) =$ $\boxed{}$

[8] **Punkte: 2; SS10,K2; kap. 11, 111**

Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathrm{El}_x z$ und $\mathrm{El}_y z$ der Funktion

$$z = f(x, y) = x^3 \ln y \qquad x > 0, y > 1$$

$\mathrm{El}_x z =$ $\qquad$ $\mathrm{El}_y z =$

---

[9] **Punkte: 2; SS11,K2; Kap. 11, 122**

Es gelte

$$y = 3x_1^2 \cdot x_2^4 \cdot x_3^3 \qquad x_i > 0,\ i = 1, 2, 3$$

Schreiben Sie diese Beziehung in log-linearer Form.

$\ln y =$

---

[10] **Punkte: 3; WS12,K1; Kap. 11, 125**

Es sei $z = f(x, y) = x^2y^3$.

Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $f''(x, y)$.

$f''(x, y) =$ $\boxed{}$

---

[11] **Punkte: 4; WS12,K2; Kap. 11, 126**

Es sei $z = f(x, y) = x^3 + y^3$.

Bestimmen Sie die Summe der beiden partiellen Elastizitäten von z, d.h. bestimmen Sie

$$\mathrm{El}_x z + \mathrm{El}_y z$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich!

$\mathrm{El}_x z + \mathrm{El}_y z =$ $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 12

[1] **Punkte: 2; II06; Kap. 12, 3**

Betrachten Sie die Gleichung

$$F(x, y, z) = xyz + xz^2 = 2$$

Nehmen Sie als gegeben an, dass durch $z = f(x, y)$ eine Funktion definiert ist, die für alle (x, y) die Gleichung $F(x, y, z) = 2$ erfüllt.

Bestimmen Sie z'_x für $x = y = z = 1$.

z'_x für $x = y = z = 1$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 3; WS03, WS07M2, WS08M2; Kap.12,4**

Berechnen Sie die Substitutionselastizität σ_{yx} zwischen y und x, wenn

$$F(x, y) = x^3 + y^3 \qquad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad y > 0$$

$\sigma_{yx} =$ $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; WS03, SS06K1M2; Kap. 12,6**

Bestimmen Sie die lineare Approximation der Funktion

$$f(x, y) = e^x \ln y$$

um den Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Lineare Approximation um $(0, 1)$: $f(x, y) \approx$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WDHWS03, SS06K2M2; Kap. 12, 7**

Betrachten Sie die Produktionsfunktion

$$Y = F(K, L) = 12K^{1/2}L^{2/3} ,$$

wobei K und L der Kapital- bzw. Arbeitsinput seien.

Bestimmen Sie das Differential dY.

Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

$dY =$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 3; SS03; Kap. 12, 9**

Die Nachfrage nach einem Gut sei $f(W, P)$, wobei W die Ausgaben für Werbung und P der Preis des Gutes seien.

Die Angebotsfunktion sei $g(P)$. Im Gleichgewicht gilt

$$f(W, P) = g(P)$$

Bestimmen Sie $\frac{dP}{dW}$.

$\frac{dP}{dW} =$ $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: 4 = 2 + 2; SS03; Kap. 12, 10**
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$z = f(x, y) = \frac{xy^2}{1 + y^2}$$

a) Berechnen Sie das totale Differenzial dz.

$dz =$ $\boxed{}$

b) Verwenden Sie das totale Differenzial, um die folgende Frage zu beantworten: Um wieviele Einheiten verändert sich der Output ungefähr, wenn die Inputfaktoren ausgehend von $(x, y) = (3, 2)$ um jeweils 2 Einheiten erhöht werden? Geben Sie **zwei** Stellen nach dem Dezimalpunkt an.

Änderung des Outputs ungefähr $\boxed{ \text{Einheiten}}$

---

[7] **Punkte: 2; SS03, WS07M2, SS08M2;** **Kap. 12, 11**

Falls die Funktion

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z^2 \exp\left(\frac{x + y}{y + z}\right)$$

homogen ist, bestimmen Sie bitte den Homogenitätsgrad k dieser Funktion.

Andernfalls streichen Sie bitte dieses Kästchen durch.

$k = \boxed{}$

---

[8] **Punkte: 2; WS04, SS06K1M2;** **Kap. 12, 20**

Für die Funktion $F(x, y) = ax^b y^c$ gelte $F(x_0, y_0) = 1$.

Ferner sei $b + c = 2$.

Bestimmen Sie $F(3x_0, 3y_0)$.

$F(3x_0, 3y_0) = \boxed{}$

---

[9] **Punkte: 2; SS04; Kap. 12, 26**

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3$$

über dem Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Lösen Sie die Gleichung der Tangentialebene nach z auf.

$z =$ $\boxed{}$

---

[10] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap. 12, 143**

Die Funktion $f(x, y)$ sei homogen vom Grad $k = 2$ und es gelte $f(1, 1) = 3$.

Bestimmen Sie $f(4, 4)$.

$f(4, 4) =$ $\boxed{}$

---

[11] **Punkte: 3; WS11,K1; Kap. 12, 144**

Bestimmen Sie für die Funktion

$$z = f(x, y) = e^x + \ln y \qquad -\infty < x < \infty;\ y > 0$$

die lineare Approximation um $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

$$f(x, y) \approx \boxed{}$$

---

[12] **WS11,K2, Kap. 12, 145**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Funktionen von zwei Variablen und deren Höhenlinien.*

a) Die Höhenlinie einer Funktion $F(x, y)$ zum Niveau c ist eine Punktmenge im $\mathbb{R}^2$, genauer: Es ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c\}$.

b) Die Steigung einer Höhenlinie $F(x, y) = c$ ist gegeben durch $y' = \dfrac{F_1'(x, y)}{F_2'(x, y)}$.

c) Die Grenzrate der Substitution von y für x ist $R_{yx} = -y' = \dfrac{F_y'(x, y)}{F_x'(x, y)}$.

d) Längs einer Höhenlinie hat $F(x, y)$ einen konstanten Wert.

e) Falls $F(x, y) = c$, so gilt $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{F_y'(x, y)}{F_x'(x, y)}$, wenn $F_x'(x, y) \neq 0$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[13] **Punkte: 3; WS11,K2; Kap. 12, 146**

Für

$$z = f(x, y) = xy$$

sei dz das Differential und Δz die tatsächliche Änderung des Funktionswertes, wenn x um dx und y um dy geändert wird.

Berechnen Sie $\Delta z - dz$, wenn $x = y = 4, dx = 0.8$ und $dy = 0.3$.

$\Delta z - dz =$ $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 13

[1] **Punkte: 3; WDHWS03, SS06K1M2; Kap. 13, 1**

Die Funktion $f(x, y) = x^4/4 - 3x^3 - y^2 + 4$ hat zwei stationäre Punkte. Bestimmen Sie diese und geben Sie an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt. Wenn Sie mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen keine Entscheidung treffen können, so schreiben Sie bitte ,,KEINE" in das ensprechende Kästchen für die ,,Art".

1. Stationärer Punkt:	$x =$ $\quad$ $y =$	Art:	
2. Stationärer Punkt:	$x =$ $\quad$ $y =$	Art:	

---

[2] **Punkte: 4; WS03, SS06K2M2; Kap. 13, 3**

Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2$ sei definiert auf dem abgeschlossenen, beschränkten Bereich $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, d.h. auf dem positiven Einheitsquadrat. (**Hinweis: Zeichnen Sie sich den Bereich auf!**)

Bestimmen Sie den globalen Maximum- und Minimum-Punkt dieser Funktion in D.

Maximum in	$x =$ $\quad$ $y =$
Minimum in	$x =$ $\quad$ $y =$

---

[3] **Punkte: 4; WS03, WS07M2, WS09K2; Kap. 13, 4**

Ein Unternehmen produziere x Einheiten eines Gutes. Die gesamte hergestellte Ware kann zum festen Stückpreis p verkauft werden. Die Kostenfunktion sei $C(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$. Das Unternehmen möchte seinen Gewinn maximieren. Es stellt sich die Frage, wie der maximale Gewinn π^* vom Preis abhängt.

Bestimmen Sie den optimalen Gewinn $\pi^*(p)$ als Funktion des Preises p und geben Sie die Änderungsrate der Optimalwertfunktion bezüglich p an.

$\pi^*(p) =$ $\boxed{}$ Änderungsrate: $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 6 = 2 + 2 + 2; WS04; Kap. 13, 12**

Die Funktion g sei definiert durch

$$g(x, y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2$$

und der Definitionsbereich sei gegeben durch $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich D in dem folgenden Koordinatensystem. Geben Sie dabei deutlich zu erkennen, welche Linien zu D bzw. nicht zu D gehören, indem Sie durchgezogene bzw. gestrichelte Linien verwenden.
b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von g **im Innern** von D und klassifizieren Sie diese. Listen Sie in dem linken Kasten die Koordinaten (x_0, y_0) aller stationären Punkte **im Innern** von D auf und in dem rechten Kasten **in der selben Reihenfolge** die Art des stationären Punktes.

(x_0, y_0) : $\boxed{}$ ist ein $\boxed{}$

c) Bestimmen Sie die globalen Extrempunkte und Extremwerte von g in D. **HINWEIS:** Ein globaler Extremwert kann durchaus in mehreren Punkten angenommen werden. Geben Sie also **alle** Punkte an, in denen die globalen Extremwerte angenommen werden.

Maximum in $\boxed{}$ Maximalwert: $\boxed{}$

Minimum in $\boxed{}$ Minimalwert: $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 4; WS11,K1; Kap. 13, 92**

Bestimmen Sie die Stellen (x_{max}, y_{max}) und (x_{min}, y_{min}), an denen die Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2 y \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 \le 1;\ 0 \le x \le 1$$

ihr Maximum bzw. ihr Minimum annimmt.

Hinweis: Sie vermeiden Rundungsfehler, wenn Sie eventuell vorkommende Quadratwurzeln nicht ausrechnen!

$(x_{max}, y_{max}) =$ $\boxed{}$ $\qquad (x_{min}, y_{min}) =$ $\boxed{}$

---

[6] **WS10K2, Kap. 13, 84**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *multivariater Optimierung.*

a) Nach dem Extremwertsatz kann eine stetige Funktion von n Variablen nur dann ein globales Maximum besitzen, wenn sie auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge definiert ist.

b) Ein stationärer Punkt einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist genau dann ein Sattelpunkt, wenn in jeder Umgebung, d.h. in beliebiger Nähe dieses Punktes sowohl ein Punkt mit größerem Funktionswert als auch einer mit kleinerem Funktionswert liegt.

c) Ist die Funktion $f(x,y)$ in einem offenen Kreis um den stationären Punkt (x_0, y_0) konstant, so kann der stationäre Punkt kein Sattelpunkt sein.

d) Hat die Funktion $f(x,y)$ ein Maximum an der Stelle (x_0, y_0) und ist die Funktion F monoton wachsend, so hat auch die Funktion $g(x,y) = F(f(x,y))$ ein Maximum an der Stelle (x_0, y_0).

e) Hat die Funktion $g(x,y) = F(f(x,y))$ ein Maximum an der Stelle (x_0, y_0), so hat auch $f(x,y)$ dort ein Maximum.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[7] **Punkte: 2; SS10,K1; Kap. 13, 85**
Ein Unternehmen produziert und verkauft zwei Güter A und B. Die Preise pro Einheit seien P_A bzw. P_B. Die Kosten für die Produktion von x bzw. y Einheiten seien $C(x, y)$. Die Gewinnfunktion ist dann

$$\pi(x, y) = P_A \cdot x + P_B \cdot y - C(x, y)$$

Das Unternehmen erzielt seinen maximalen Gewinn, wenn es 50 Einheiten von Gut A und 75 Einheiten von Gut B produziert, d.h. $x^* = 50$ und $y^* = 75$.
Wie ändert sich der maximale Gewinn **ungefähr**, wenn der Preis (pro Einheit) für Gut A um einen Euro fällt, während der Preis (pro Einheit) für Gut B um einen Euro steigt.

Ungefähre Änderung des maximalen Gewinns: $\boxed{}$

---

[8] **Punkte: 2; SS11,K2; Kap. 13, 99**

Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Güter A und B. Die Kosten für die Herstellung von x bzw. y Einheiten seien $C(x, y)$. Die Verkaufspreise pro Einheit von A bzw. B seien p bzw. q. Dann ist die Gewinnfunktion

$$\pi(x, y) = px + qy - C(x, y)$$

Das Unternehmen erzielt maximalen Gewinn für $(x^*, y^*) = (100, 200)$.

Um wieviele Geldeinheiten verändert sich der maximale Gewinn ungefähr, wenn p um eine halbe Geldeinheit fällt, während q um eine Geldeinheit steigt?

Ungefähre Änderung des maximalen Gewinns: $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 14

[1] **Punkte: 3; SS03, SS06K1M2; Kap. 14, 9**

Maximieren Sie die Funktion

$$x^2 - y^2 + y \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x^2 + y^2 \le 1$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Bedingungen die **DREI** möglichen Kandidaten (x^*, y^*) für die Lösung dieses Problems.

$(x^*, y^*) =$ **1.)** **2.)** **3.)**

---

[2] **Punkte: 3; WS04, SS06K2M2; Kap. 14, 13**

Die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$$

hat unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 2z^2 \le 16$ einen eindeutig bestimmten Minimumpunkt, der **im Innern der zulässigen Menge** liegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) dieses Minimumpunktes.

$x^* =$ $y^* =$ $z^* =$

---

[3] **Punkte: 4; SS05; Kap. 14, 31**

Betrachten Sie das Problem

$$\max\ 40a - 0.02a^2 + 36b - 0.03b^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$(1) \quad 4a + 3b \leq 1\,950 \qquad\qquad (2) \quad \left(\frac{a}{30}\right)^2 + \left(\frac{b}{50}\right)^2 \geq 100$$

Bestimmen Sie die einzige Lösung (a^*, b^*) des Problems, wenn bekannt ist, dass der Lagrange-Multiplikator für die Nebenbedingung (1) größer als Null ist, während die Ungleichung (2) schlaff ist, d.h.

$$\left(\frac{a}{30}\right)^2 + \left(\frac{b}{50}\right)^2 > 100$$

$(a^*, b^*) =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2 ; (IV06); Kap. 14, 43**

Die Produktionsfunktion

$$F(K, L) = 120KL$$

wird unter der Nebenbedingung $2K + 5L = 120$ maximiert durch $K^* = 30$ und $L^* = 12$.

Geben Sie eine Approximation des Zuwachses im Output an, wenn die Konstante in der Nebenbdingung auf 121 erhöht wird.

Approximativer Zuwachs: $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 3; WS08K2; Kap. 14, 70**

Betrachten Sie das folgende Maximierungsproblem

$$\max\ 5x + y$$

unter der Nebenbedingung

$$10 \geq x^2 + y + x$$

Geben Sie die komplementäre Schlupfbedingung für λ an.

Bestimmen Sie die einzige Lösung (x^*, y^*) für das Problem.

$(x^*, y^*) =$

---

[6] **Punkte: 3; SS08K1; Kap. 14, 73**

Das Maximierungsproblem

$$\max\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{unter} \quad 10x + 5y \leq 150$$

hat genau eine Lösung (x^*, y^*) mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$. Bestimmen Sie diese.

$x^* =$ $\qquad$ $y^* =$

---

[7] **SS09K2, Kap. 14, 81**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *komplementären Schlupfbedingung*

$$\lambda \geq 0 \text{ und } \lambda = 0, \text{ wenn } g(x,y) < c$$

in einem nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\max f(x,y) \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad g(x,y) \leq c$$

a) Die Bedingung ist äquivalent zu $\lambda \cdot [g(x,y) - c] \geq 0$.

b) Wenn $g(x,y) = c$, folgt $\lambda > 0$.

c) Aus $\lambda > 0$, folgt $g(x,y) = c$.

d) Ist die Nebenbedingung nicht bindend, folgt $\lambda = 0$.

e) Es ist möglich, dass $\lambda = 0$ und $g(x,y) = c$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,d,e	b,c,d	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

[8] **WS10K1, Kap. 14, 86**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit *nichtlinearer Programmierung.*

a) Ist der Lagrange-Multiplikator $\lambda > 0$, so ist die zugehörige Nebenbedingung bindend.

b) Wenn eine Nebenbedingung bindend ist, so ist der zugehörige Lagrange-Multiplikator $\lambda > 0$.

c) Die Bedingung $\lambda \geq 0$ und $\lambda = 0$, falls $g(x, y) < c$ ist äquivalent zu $\lambda \cdot (g(x, y) - c) = 0$.

d) Die Kuhn-Tucker-Bedingungen sind notwendig und hinreichend zur Lösung eines Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen in Ungleichheitsform.

e) Der zu einer Nebenbedingung $g(x, y) \leq c$ gehörende Lagrange-Multiplikator $\lambda(c)$ kann als Änderungsrate der Optimalwertfunktion $f^*(c)$ bei Änderungen der Konstanten c interpretiert werden.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[9] **Punkte: 4; SS10,K2; Kap. 14, 91**

Das Problem

$$\max \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y \qquad \text{unter} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \end{cases} \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

hat genau eine Lösung (x^*, y^*).

Bestimmen Sie diese Lösung sowie die zugehörigen Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2.

$x^* =$ $\boxed{}$ $y^* =$ $\boxed{}$

$\lambda_1 =$ $\boxed{}$ $\lambda_2 =$ $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 15

[1] **Punkte: 3; WS11,K2; Kap. 15, 114**
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

soll nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst werden. Formen Sie die zu diesem Gleichungssystem gehörige erweiterte Koeffizientenmatrix so weit um, dass die Koeffizienten der führenden Einträge 1 sind und unterhalb der führenden Einträge Nullen stehen. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden.
Geben Sie die zu diesem Stadium gehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

---

[2] **SS11,K1, Kap. 15, 115**
Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Matrizenmultiplikation* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$.

a) Die Matrizenmultiplikation ist nur dann definiert, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ genau so viele Spalten hat wie $\boldsymbol{B}$ Zeilen hat.

b) Das Matrizenprodukt von $\boldsymbol{A}_{n\times m}$und $\boldsymbol{B}_{m\times p}$ ist eine $n \times p$-Matrix $\boldsymbol{C}$.

c) Aus $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ folgt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, wenn $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

d) Wenn $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ mit $m \neq n$, so gilt $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_m = \boldsymbol{A}$.

e) Die Matrizenmultiplikation ist nicht vertauschbar.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

---

[3] **Punkte: 2; WS11,K1; Kap. 15, 122**

Berechnen Sie $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 15, 124**

Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen ergab sich mit Hilfe der Gauß'schen Elimination nach einigen Schritten die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems (x_1, x_2, x_3).

$(x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 2; WS11,K2; Kap. 15, 124**

Welche Bedingung müssen die Zahlen a und b erfüllen, damit die Vektoren $\boldsymbol{x} = (a, -2, b^2)$ und $\boldsymbol{y} = (a, ab, 1)$ orthogonal sind?

Bedingung: $\boxed{}$

Alte Klausuraufgaben. Kap. 16

[1] **Punkte: 2; WS10K2; Kap. 16, 94**

Die Inverse einer Matrix $\boldsymbol{A}$ soll durch elementare Zeilenoperationen bestimmt werden.

Nehmen Sie an, dass Sie nach endlich vielen Operationen zu der folgenden Gestalt gekommen sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Führen Sie die restlichen Operationen durch und schreiben Sie dann die zu $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix in das Lösungskästchen.

$\boldsymbol{A}^{-1} =$ $\boxed{}$

---

[2] **Punkte: 2; SS11,K1; Kap. 16, 106**

Die Koeffizientenmatrix in einem homogenen linearen Gleichungssystem sei

$$\boldsymbol{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

Nichttriviale Lösungen für t $\boxed{}$

---

[3] **Punkte: 2; SS11,K1; Kap. 16, 107**

Bestimmen Sie $|\boldsymbol{A}|$, wenn

$$|\boldsymbol{AB}| = 36 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}| =$ $\boxed{}$

---

[4] **Punkte: 3; SS11,K2; Kap. 16, 109**

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & & & = 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = 6 \end{array}$$

soll nach der Cramer'schen Regel gelöst werden.
Schreiben Sie die Lösungen für x_1, x_2 und x_3 so als Bruch, dass Zähler und Nenner aus der Cramer'schen Regel erkennbar sind. Die Determinanten sollen selbstverständlich ausgerechnet werden.

$x_1 =$ $\boxed{}$ $x_2 =$ $\boxed{}$ $x_3 =$ $\boxed{}$

---

[5] **Punkte: 2; SS11,K2; Kap. 16, 110**

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ quadratische 2×2-Matrizen mit

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$\boldsymbol{A}^{-1} =$ $\boxed{}$

---

[6] **Punkte: 3; WS11,K2; Kap. 16, 114**

Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für die 3×3-Matrix $\boldsymbol{A}$ gelte

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$.

$\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3) =$ $\boxed{}$
