Klausur Mathematik, 1. Oktober 2012, A

Die Klausureinsicht ist Do, 8.11.2012 um 18:00 in MZG 8.136.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Falls Sie aufgrund dieser Klausurergbnisse eine Pflichtberatung brauchen, so kommen Sie bitte rechtzeitig, d.h. zu Beginn des Semesters.

Note	5.0	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0
Punkte	−29.5	−34.5	−39.5	−44.5	−49.5	−54.5	−59.5	−64.5	−69.5	−74.5	−90
Anzahl	39	15	15	12	11	15	10	5	3	1	1
Prozent	30.7	11.8	11.8	9.5	8.7	11.8	7.9	3.9	2.4	0.8	0.8

[1] Richtig: 62.6 %
Berechnen Sie

$$8a \cdot \frac{3/2}{4/3} + \sqrt[3]{a^3} \qquad \text{für} \quad a > 0$$

$$8a \cdot \frac{3/2}{4/3} + \sqrt[3]{a^3} = \boxed{10a}$$

Lösung: $8a \cdot \frac{3/2}{4/3} + \sqrt[3]{a^3} = 8a \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} + a = 8 \cdot \frac{9}{8} \cdot a + a = 9a + a = 10a$

---

[2] Richtig: 66.9% Die folgenden Aussagen befassen sich mit *quadratischen Gleichungen*.

a) Die Gleichung $x^2 + a = 0$ hat für alle $a \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$.

b) Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei verschiedene Lösungen.

c) Die quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$ hat für $p \neq 0$ immer zwei verschiedene Lösungen.

d) Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann keine Lösung, wenn $\frac{p^2}{4} - q \leq 0$.

e) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann keine Lösung, wenn die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ keine Nullstellen hat.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: b,c,e

---

[3] Richtig: 28.4%
Berechnen Sie die Doppelsumme

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1) = \boxed{38}$$

Lösung: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1) = \sum_{i=1}^{2}(1 \cdot i + 1 + 2 \cdot i + 1 + 3 \cdot i + 1 + 4 \cdot i + 1) = \sum_{i=1}^{2}(10i + 4) = 10 + 4 + 20 + 4 = 38$

Alternativ kann man sich auch alle Zahlen $i \cdot j + 1$ in eine 2×4-Matrix schreiben und alle Elemente dieser Matrix addieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

---

[4] Richtig: 90.6%
Betrachten Sie die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 1$. Bestimmen Sie $f(5)$, wenn $f(3) = 8$ gilt.

$$f(5) = \boxed{32}$$

Lösung: $f(3) = a^3 = 8 \iff a = 2$, so dass $f(5) = 2^5 = 32$.

---

[5] Richtig: 46.1%
Für welche x gilt

$$(x-2)(5-x) > 0\ ?$$

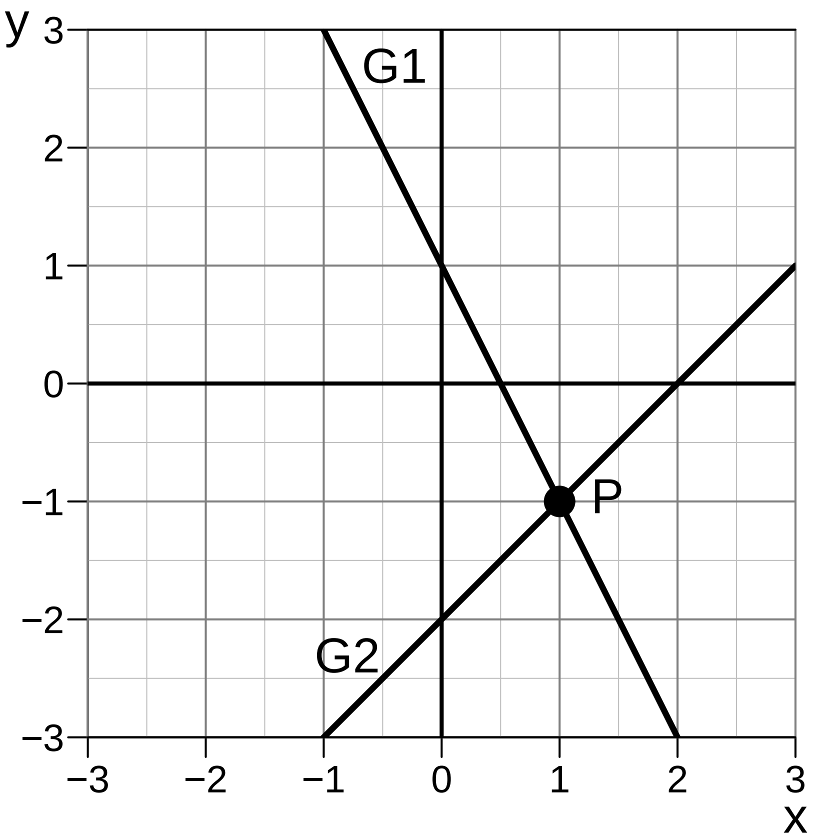
$$(x-2)(5-x) > 0 \iff \boxed{2 < x < 5}$$

Lösung: $x - 2 = 0 \iff x = 2$ und $5 - x = 0 \iff x = 5$.
Für $x < 2$ ist $x - 2 < 0$ und $5 - x > 0$, so dass $(x-2)(5-x) < 0$.
Für $2 < x < 5$ ist $x - 2 > 0$ und $5 - x > 0$, so dass $(x-2)(5-x) > 0$.
Für $x > 5$ ist $x - 2 > 0$ und $5 - x < 0$, so dass $(x-2)(5-x) < 0$.
Damit gilt $(x-2)(5-x) > 0 \iff 2 < x < 5$.

Alternative Lösung: $(x-2)(5-x) = 5x - x^2 - 10 + 2x = -x^2 + 7x - 10$. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, die zwischen den Nullstellen positiv ist. Die Nullstellen sind 2 und 5, wie man an der Darstellung $(x-2)(5-x)$ sieht.

---

[6] Richtig: 79.5% Die folgenden Aussagen befassen sich mit den in der folgenden Abbildung dargestellten *Geraden*.



a) Die Gleichung der Geraden $G2$ ist $y = -2x + 1$.

b) Die Gleichung der Geraden $G2$ ist durch den y-Achsenabschnitt -2 und den x-Achsenabschnitt 2 eindeutig bestimmt.

c) Der Punkt P erfüllt sowohl die Geradengleichung von $G1$ als auch von $G2$.

d) Die Gerade $G1$ hat die Steigung 2.

e) Liegt (x, y) unterhalb der Geraden $G1$, so gilt $y < -2x + 1$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: b,c,e

[7] Richtig: 33.9%
Für welches $x > 0$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\ln(a^2x^3) - 2\ln(ax) = \ln 2$$

Dabei ist $a > 0$ und $x > 0$.

$x = \boxed{2}$

Lösung: Die linke Seite der Gleichung ist:

$$\ln(a^2x^3) - 2\ln(ax) = \ln(a^2) + \ln(x^3) - 2\ln a - 2\ln x = 2\ln a + 3\ln x - 2\ln a - 2\ln x = \ln x$$

Damit ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $\ln x = \ln 2 \iff x = 2$

---

[8] Richtig: 42.5%
Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{8xe^x}{\ln(1+4x)}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{8xe^x}{\ln(1+4x)} = \boxed{2}$

Lösung: Für $x = 0$ sind Zähler und Nenner 0, so dass eine unbestimmte Form vom Typ "0/0" vorliegt. Nach (7.12.1) gilt: $\lim_{x\to 0} \frac{8xe^x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{8e^x + 8xe^x}{4/(1+4x)} = \frac{8+0}{4/(1+0)} = 2$

---

[9] Richtig: 5.5%
Bestimmen Sie die zu

$$y = f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} \qquad x < 0$$

inverse Funktion $x = g(y)$.

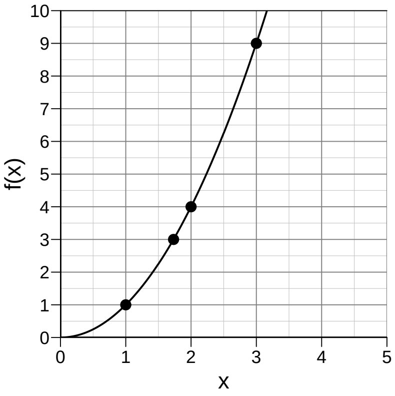
$g(y) = \boxed{\ln\big(y/(1+y)\big) = \ln y - \ln(1+y)}$

Lösung: $y = f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} \iff y(1-e^x) = e^x \iff e^x + ye^x = y \iff e^x(1+y) = y \iff e^x = \frac{y}{1+y} \iff x = \ln\big(y/(1+y)\big) = \ln y - \ln(1+y)$.

---

[10]   Richtig: 33.9%

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer streng monotonen und damit invertierbaren Funktion f. Die Inverse sei mit f^{-1} bezeichnet.

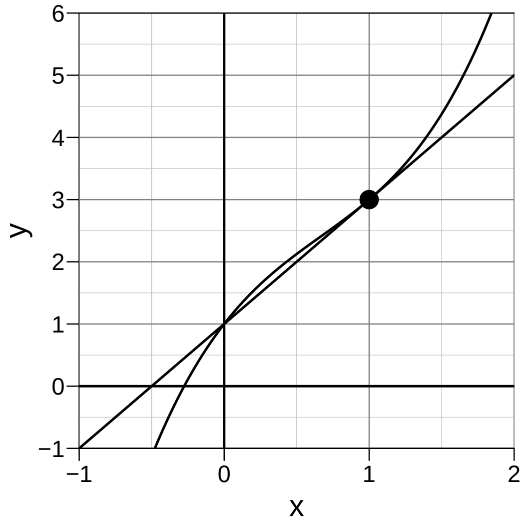


Bestimmen Sie: $f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big)$

$$f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big) = \boxed{9}$$

Lösung: $f(1) + f^{-1}(4) + f\big(f^{-1}(3)\big) + f^{-1}\big(f(3)\big) = 1 + 2 + 3 + 3 = 9$

[11] Richtig: 71.3%
Bestimmen Sie anhand der folgenden Abbildung die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion im Punkt $(1, 3)$.
Geben Sie die Gleichung der Tangente in der Form $y = ax + b$ **an.**



$y = ax + b =$ $\boxed{2x + 1}$

Lösung: Man sieht an der Abbildung, dass die Steigung 2 und der y-Achsenabschnitt 1 ist, d.h. $y = 2x + 1$.

[12] Richtig: 26%
Betrachten Sie die Funktion

$$y = f(x) = 4x^2$$

Bilden Sie den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

und **vereinfachen** Sie diesen so weit wie möglich.

Vereinfacht: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{8x + 4\Delta x}$

Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate von f, wenn x von 3 um $\Delta x = 2$ auf 5 geändert wird.

Durschnittliche Änderungsrate: $\boxed{32}$

Lösung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x+\Delta x)^2 - 4x^2}{\Delta x} = \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 4x^2}{\Delta x} =$
$\frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 4x^2}{\Delta x} = \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x$

Die durchschnittliche Änderungsrate ist $\frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{100 - 36}{2} = 32$.
Oder mit dem Ergebnis der ersten Teilaufgabe: $8x + 4\Delta x = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 24 + 8 = 32$.

---

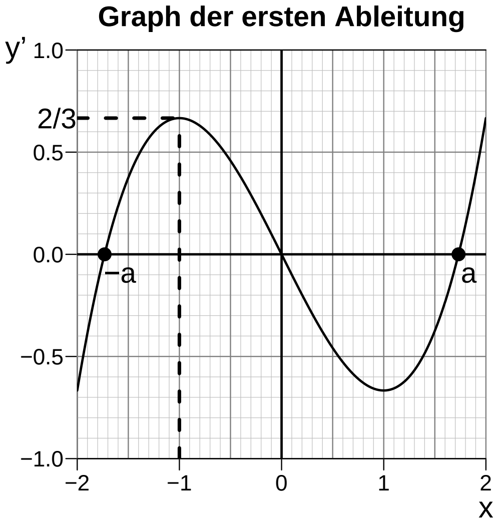
[13] Richtig: 4.7%
Verwenden Sie die quadratische Approximation um $x = 0$ zur Berechnung von $e^{0.2}$.

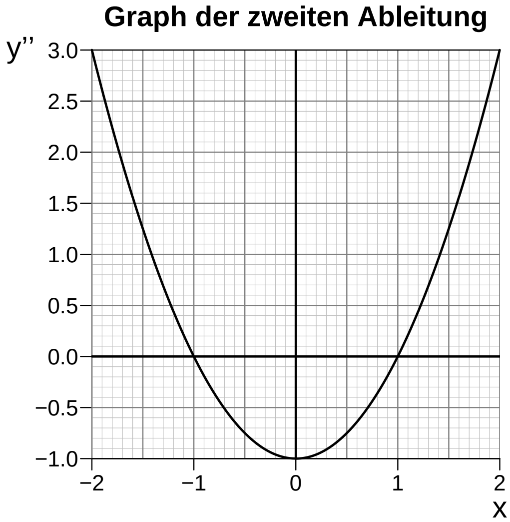
$e^{0.2} \approx \boxed{1.22}$

Lösung: Nach (7.5.5) gilt $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2} = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} = 1.22$.

---

[14] Richtig: 39.4% Die folgenden Aussagen befassen sich mit den in der folgenden Abbildung dargestellten *Ableitungen erster und zweiter Ordnung* einer Funktion f, die auf $[-2, 2]$ definiert ist.





a) Die Funktion f ist konvex auf $[-1, 1]$.

b) Die Funktion f ist für $x \in [-a, 0]$ monoton wachsend.

c) Die Funktion f ist für $x \in (0, a)$ streng monoton fallend.

d) Wenn $f(-1) = 3$, so ist die relative Änderungsrate von f an der Stelle -1 gleich $2/9$.

e) Da $f''(x) \geq 0$ für $x \in [-2, -1]$, ist f monoton steigend im Intervall $[-2, -1]$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: b,c,d

---

[15] Richtig: 26%
Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx = \boxed{2}$$

Lösung: Nach (9.3.8) gilt $\frac{d}{dt} \int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx = 2 \cdot e^{\ln t} \cdot \frac{1}{t} = 2t \cdot \frac{1}{t} = 2$.

Alternativ ist: $\int_0^{\ln t} 2 \cdot e^x \, dx = 2(e^{\ln t} - e^0) = 2t - 2$ und $\frac{d}{dt}(2t - 2) = 2$.

[16] Richtig: 24.4%
Bestimmen Sie die Elastizität der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} + x^{3/2} \cdot x^3 \cdot x^{-2} \qquad \text{für} \quad x > 0$$

$\mathrm{El}_x f(x) =$ $\boxed{5/2 = 2.5}$

Lösung: $y = f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} + x^{3/2} \cdot x^3 \cdot x^{-2} = x^3 \cdot x^{-1/2} + x^{3/2+3-2} = x^{5/2} + x^{5/2} = 2x^{5/2}$, d.h. es handelt sich um eine Potenzfunktion. Nach Beispiel 7.7.1 ist die Elastizität gleich dem Exponenten, d.h. 5/2.

---

[17] Richtig: 43%
Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$$

hat genau eine lokale Extremstelle x^*. Bestimmen Sie diese.

Hinweis: Die erste Ableitung $f'(x)$ hat genau zwei Nullstellen, die beide **ganzzahlig** sind.

$x^* =$ $\boxed{2}$

Lösung: $f'(x) = x^3 - 3x - 2$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur ± 1 und ± 2 in Frage. Einsetzen ergibt, dass -1 und 2 Nullstellen der ersten Ableitung sind. Polynomdivision ergibt $(x^3 - 3x - 2) \div (x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, d.h. $f'(x) = (x + 1)^2(x - 2)$. An dieser Darstellung sieht man, dass die 1. Ableitung nur an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen wechselt. Nach Theorem 8.6.1 ist daher nur $x^* = 2$ ein lokaler Extrempunkt.

---

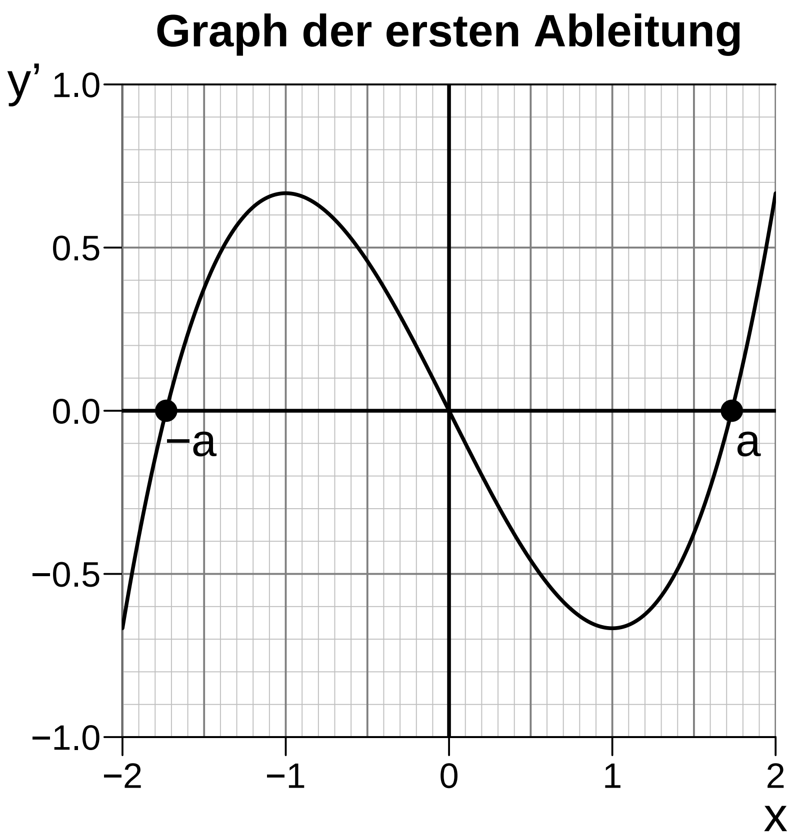
[18] Richtig: 38.3%
Bestimmen Sie $\int 2^x \, dx$.

$\int 2^x \, dx =$ $\boxed{\frac{2^x}{\ln 2} + C}$

Lösung: Die Ableitung von $\frac{2^x}{\ln 2} + C$ ist nach (6.10.3) 2^x. Damit folgt das Ergebnis.

---

[19] Richtig: 44.1% Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Optimierung einer univariaten Funktion* $y = f(x)$, deren Ableitung in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Die Funktion sei definiert auf $[-2, 2]$.



a) Nach dem Extremwertsatz besitzt die Funktion f einen Maximumpunkt und einen Minimumpunkt in $[-2, 2]$.

b) Kandidaten für globale Extrempunkte sind $-2, -a, 0, a$ und 2.

c) Das globale Maximum kann nicht in $-a$ und auch nicht in a angenommen werden.

d) An der Stelle 0 hat die Funktion ein lokales Minimum.

e) Das globale Minimum kann nur in einem der beiden Randpunkte angenommen werden.

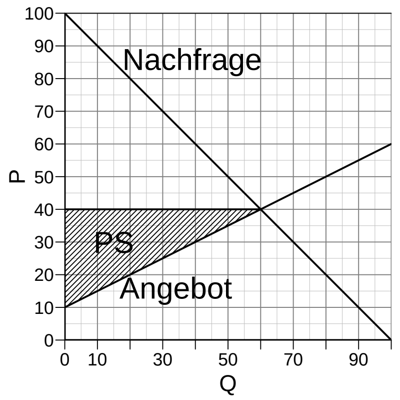
Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: a,b,c

[20] Richtig: 18.7%
Die folgende Abbildung zeigt eine Angebots- und Nachfragefunktion.



Schraffieren Sie in der obigen Abbildung die Produzentenrente PS.

Wie groß ist die Produzentenrente PS?

$PS =$ $\boxed{900}$

Lösung: Die Fläche des schraffierten Dreiecks ist $PS = (40-10) \cdot 60/2 = 900$.

---

[21] Richtig: 68.5% Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *effektiven Zinsrate*.

a) Bei fester nominaler (jährlicher) Zinsrate r und gegebener Anzahl n von Zinsperioden pro Jahr ist die effektive Zinsrate eindeutig bestimmt, d.h. sie hängt nicht vom Anfangskapital ab.

b) Werden die Zinsen nur einmal pro Jahr gut geschrieben, so stimmt die effektive Zinsrate mit der nominalen (jährlichen) Zinsrate überein.

c) Je größer die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr, desto höher ist die effektive jährliche Zinsrate bei fester nominaler Zinsrate r.

d) Die effektive Zinsrate berechnet sich bei gegebener Anzahl n von Zinsperioden pro Jahr und nominaler Zinsrate r aus $R = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

e) Bei stetiger Verzinsung zur nominalen Zinsrate r ist die effektive Zinsrate $R = 1 - e^r$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: a,b,c

---

[22] Richtig: 51.8%
Bestimmen Sie die partielle Elastizität $\mathrm{El}_x z$, wenn

$$z = f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$\mathrm{El}_x z = \boxed{2x^2}$

Lösung: Nach (11.8.1) ist $\mathrm{El}_x z = \dfrac{x}{e^{x^2+y^2}} \cdot 2xe^{x^2+y^2} = 2x^2$.

---

[23] Richtig: 62.2%
Sei $f(x, y, z) = xy^2z^3 + x^2y^3z + x^3yz^2$. Bestimmen Sie f'''_{xyz} an der Stelle $x = y = z = 1$.

$f'''_{xyz}(1, 1, 1) = \boxed{18}$

Lösung: $f'_x(x, y, z) = y^2z^3 + 2xy^3z + 3x^2yz^2 \quad \Rightarrow \quad f''_{xy}(x, y, z) = 2yz^3 + 6xy^2z + 3x^2z^2 \quad \Rightarrow$
$f'''_{xyz}(x, y, z) = 6yz^2 + 6xy^2 + 6x^2z$
Für $x = y = z = 1$ ergibt sich $f'''_{xyz} = 18$.

---

[24] Richtig: 52%
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$Q = F(K, L) = 2\sqrt{KL}$$

Für die Produktion von $c = 100$ Einheiten stehen $L_0 = 20$ Einheiten Arbeit zur Verfügung. Wie hoch muss der Kapitalinput K_0 sein, um den Auftrag von 100 Einheiten erfüllen zu können?

Mit anderen Worten: Gesucht ist K_0, so dass der Punkt $(K_0, L_0) = (K_0, 20)$ auf der Höhenlinie $F(K, L) = 100$ liegt.

$K_0 = \boxed{125}$

Lösung: $Q = F(K_0, 20) = 100 \iff 2\sqrt{K_0 \cdot 20} = 100 \iff \sqrt{20K_0} = 50 \iff 20K_0 = 2\,500 \iff K_0 = 125$

---

[25] Richtig: 50.4%
Durch die Gleichung

$$F(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

wird eine Höhenlinie von F definiert.
Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution R_{yx} von y für x an der Stelle $(x,y) = (1,2)$.

$R_{yx}(1,2) =$ $\boxed{1/2}$

Lösung: Nach (12.5.1) ist $R_{yx} = \dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \dfrac{2x/(x^2+y^2-4)}{2y/(x^2+y^2-4)} = \dfrac{x}{y}$ und somit $R_{yx}(1,2) = 1/2$.
Alternativ geht es auch so: $F(x,y) = \ln(x^2+y^2-4) = 0 \iff x^2+y^2-4 = 1 \iff x^2+y^2 = 5$, d.h. die gegebene Höhenlinie kann auch als Höhenlinie von $G(x,y) = x^2+y^2$ aufgefasst werden. In diesem Fall gilt $R_{yx} = \dfrac{G'_x(x,y)}{G'_y(x,y)} = \dfrac{2x}{2y} = \dfrac{x}{y}$ und damit $R_{yx}(1,2) = 1/2$.

---

[26] Richtig: 23.6% Die folgenden Aussagen befassen sich mit dem *Differential* $dz = df$ einer Funktion $z = f(x,y)$.

a) Das Differential dz gibt die Änderung des Funktionswertes an, wenn x um dx und y um dy geändert wird.

b) Es gilt $dz \approx \Delta z = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$.

c) Das Differential beschreibt die Änderung auf der in (x,y) angelegten Tangentialebene, wenn man von (x,y) zu $(x+dx, y+dy)$ geht.

d) $dz = f'_1(x,y)\,dx + f'_2(x,y)\,dy$

e) Für das Differential des Quotienten der Funktionen f und g, d.h. für das Differential der Funktion $h = \dfrac{f}{g}$ gilt $dh = \dfrac{df}{dg}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: b,c,d

---

[27] Richtig: 17.4%
Die Funktion

$$f(x,y) = e^{(x+y)^2}$$

hat unendliche viele stationäre Punkte. Welche Bedingung muss ein Punkt (x, y) erfüllen, damit er ein stationärer Punkt für diese Funktion ist?

Gesucht ist eine Gleichung, die x und y erfüllen müssen. **Vereinfachen** Sie diese Gleichung so weit wie möglich.

Bedingung für einen stationären Punkt: $\boxed{x = -y}$

Lösung: $f(x,y) = e^{(x+y)^2} = e^{x^2+2xy+y^2} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x,y) = (2x+2y)e^{x^2+2xy+y^2} = f_2'(x,y)$. Es gilt $f_1'(x,y) = f_2'(x,y) = 0 \iff 2x + 2y = 0 \iff x + y = 0 \iff x = -y$.

---

[28] Richtig: 37%
Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad k der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x^3y + 4x^2yz + 2xyz^2 + 6yz^3}{(x+y)^2}$$

$k = \boxed{2}$

Lösung: Der Zähler ist homogen vom Grad 4, denn die Summe der Exponenten in jedem Term ist 4. Für den Nenner gilt $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Die Summe der Exponenten in jedem Term ist 2. Somit ist f homogen vom Grad $k = 4 - 2 = 2$ (Siehe Bemerkung nach Beispiel 12.6.1).

---

[29] Richtig: 29.7%
Die Funktion

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

hat genau einen Sattelpunkt (x_0, y_0). Bestimmen Sie die Koordinaten (x_0, y_0) dieses Sattelpunktes und geben Sie den Wert des Kriteriums

$$AC - B^2 = f_{11}''(x_0,y_0) \cdot f_{22}''(x_0,y_0) - (f_{12}''(x_0,y_0))^2$$

an.

$(x_0, y_0) = \boxed{(1,0)}$ $\qquad AC - B^2 = \boxed{-2}$

Lösung: Es gilt $f_1'(x,y) = -x^2 + x = -x(x-1) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 1$ und $f_2'(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$, d.h. die stationären Punkte sind $(0,0)$ und $(1,0)$. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind $f_{11}''(x,y) = -2x + 1$; $f_{12}''(x,y) = 0$ und $f_{22}'' = 2$.
An der Stelle $(0,0)$ gilt $f_{11}''(0,0) = 1 > 0$ und $f_{11}''(0,0) \cdot f_{22}''(0,0) - (f_{12}''(0,0))^2 = 1 \cdot 2 - 0^2 = 2 > 0$, so dass $(0,0)$ ein lokaler Minimumpunkt ist (Theorem 13.3.1).
An der Stelle $(1,0)$ ist $f_{11}''(1,0) \cdot f_{22}''(1,0) - (f_{12}''(1,0))^2 = -1 \cdot 2 - 0^2 = -2 < 0$, so dass $(1,0)$ ein Sattelpunkt ist (Theorem 13.3.1).

---

[30] Richtig: 52.8%

Es sei $\boldsymbol{a} = (2c, 1, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (c, 2, 3)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

$$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = \boxed{(7c, 8, 15)}$$

Lösung: $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = 2(2c, 1, 3) + 3(c, 2, 3) = (4c, 2, 6) + (3c, 6, 9) = (7c, 8, 15)$.

---

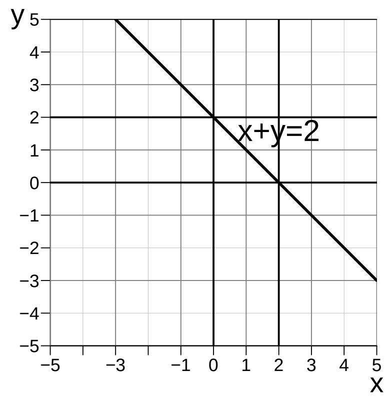
[31] Richtig: 43.4%

Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten (x^*, y^*) des Problems

$$\min\ e^{-xy} \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x + y = 2$$

$$(x^*, y^*) = \boxed{(1, 1)}$$

Skizzieren Sie die Nebenbedingung in der folgenden Abbildung.



Lösung: Die Lagrangefunktion ist $\mathcal{L}(x, y) = e^{-xy} - \lambda(x + y - 2)$. Die notwendigen Bedingungen sind

(i) $\mathcal{L}_1'(x, y) = -ye^{-xy} - \lambda = 0 \iff \lambda = -ye^{-xy}$

(ii) $\mathcal{L}_2'(x, y) = -xe^{-xy} - \lambda = 0 \iff \lambda = -xe^{-xy}$

(iii) $x + y = 2$

Aus (i) und (ii) folgt $x = y$. Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt $2x = 2 \iff x = 1$ und damit auch $y = 1$.

---

[32] Richtig: 30.7% Die folgenden Aussagen befassen sich mit *nichtlinearer Programmierung und den notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen*. Eine Funktion $f(x, y)$ soll unter einer Nebenbedingung $g(x, y) \leq c$ maximiert werden.

a) Die Kuhn-Tucker-Bedingungen besagen u.a., dass ein Lösungskandidat (x^*, y^*) ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion sein muss.

b) Die Lagrange-Funktion ist $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$.

c) Wenn $\lambda = 0$, ist $g(x, y) < c$.

d) Wenn $\lambda > 0$, ist $g(x, y) = c$.

e) Die komplementäre Schlupfbedingung ist äquivalent zu der einen alleinigen Gleichung $\lambda \cdot [g(x, y) - c] = 0$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: a,b,d

---

[33] Richtig: 76%
Berechnen Sie das Matrizenprodukt $(\boldsymbol{AB})'$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})' = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}}$$

<u>Lösung:</u> Wir zeigen zwei Möglichkeiten. In beiden benutzen wir, dass $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{I}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{I}_2) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_2 = 2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 2a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{AB})' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$

2.) $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' = 2\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A}' = 2\boldsymbol{A}' = 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$

---

[34] Richtig: 35%
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 28 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in Treppenstufenform mit x_1, x_2 und x_3 als führenden Einträgen, d.h. die Koeeffizienten von x_1, x_2 und x_3 sollen 1 sein. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden.

Geben Sie als Lösung die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

Lösung: Wir dividiern die erste Gleichung durch 2, subtrahieren die zweite Gleichung von der dritten und dividieren die zweite Gleichung durch 2:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ -3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Wir dividieren die dritte Gleichung durch -3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Damit ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[35] Richtig: 21.3%
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}| =$ $\boxed{4a - 2b}$

Lösung: Wir entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Wir entwickeln die erste der beiden Determinanten nach der zweiten Spalte und die zweite nach der ersten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -2 \cdot 1 = -2$$

Damit ist $|\boldsymbol{A}| = 2a \cdot 2 + b \cdot (-2) = 4a - 2b$.

[36] Richtig: 51.2% Die folgenden Aussagen befassen sich mit der *Inversen einer Matrix*.

a) Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

b) Wenn die beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbar sind, ist auch $\boldsymbol{AB}$ invertierbar und es gilt $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

c) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie singulär ist.

d) Die Inverse einer Matrix ist eindeutig bestimmt.

e) Die Inverse einer Matrix ist wieder invertierbar und es gilt $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

WAHR sind die folgenden Aussagen:

a,b,c	a,b,d	a,d,e	b,c,e	c,d,e
( )	( )	( )	( )	( )

Wahr sind: a,d,e

Ende der Klausur