

# Alte Klausuraufgaben zu Kapitel 3

(SS 2002 - III 2013)

von

Prof. Dr. Fred Böker

Institut für Statistik und Ökonometrie

Universität Göttingen

Platz der Göttinger Sieben 5

37073 Göttingen

Tel. 0551-394604; email: [fboeker@uni-goettingen.de](mailto:fboeker@uni-goettingen.de)

20. März 2013

[ 1 ] SS02, SS06K2M1 Durch Eintragung der entsprechenden Pfeile in die Kästchen werden aus den folgenden Aussagen Äquivalenzen oder Implikationen. Der Pfeil in beide Richtungen ist zu setzen, sofern es sich um eine Äquivalenz handelt. Der Pfeil in eine (gewählte) Richtung ist zu setzen, sofern es sich um eine Implikation in diese Richtung handelt.

a)  $x = \sqrt{9}$    $x = 3$

b)  $x^4 > 0$    $x > 0$

c)  $x \in \{1; 2; 3\}$    $x \in \{1; 2; 3; 4\}$

d)  $2x(x - 5) = 0$    $x = 0$  ODER  $x = 5$

e)  $x^2 + y^2 = 0$    $x = 0$  ODER  $y = 0$

[ 2 ] SS02 Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a) Um die Implikation  $A \Rightarrow B$  zu beweisen, kann man auch die Implikation „Nicht  $B \Rightarrow$  Nicht  $A$ “ beweisen. ( )

b) Geht man wie in a) beschrieben vor, so spricht man von einem indirekten Beweis. ( )

c) Der Wert einer endlichen Doppelsumme ist abhängig von der Reihenfolge der Summation. ( )

d) Wenn  $a$  eine Konstante ist, so gilt  $\sum_{i=1}^4 a = 4a$ . ( )

e) Wenn  $n(A)$  die Anzahl der Elemente in der Menge  $A$  bezeichnet, so gilt stets  $n(A \cap B) < n(A)$ . ( )

[ 3 ] SS02, SS06K1M1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und **vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.**

a)  $\sum_{k=10}^{20} (2k + 3) =$

b)  $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} =$

c)  $\sum_{j=0}^1 \sum_{i=10}^{13} \frac{i}{j+1} =$

[ 4 ] WDHWS03 Berechnen Sie die folgende Summe:

$\sum_{j=3}^6 (2j - 5)^2 =$

[ 5 ] WS03 Berechnen Sie die folgenden Summen:

a)  $\sum_{i=0}^3 \frac{i}{(i+1)(i+2)} =$

b)  $\sum_{k=-2}^3 (k+3)^k =$

[ 6 ] WS03, SS06K1M1

Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in der gewählten Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt.

a)  $x = 2$  und  $y = -2$    $x + y = 0$

b)  $(x - 3)(x^2 + 2) = 0$    $x = 3$

c)  $x^2 = 9$    $x = 3$

[ 7 ] WDHWS03, WS07M1

Berechnen Sie:

$$\binom{17}{3} = \text{}$$

[ 8 ] WS03 Berechnen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{3(n-3)!}{n!} \binom{n}{3} = \text{}$$

[ 9 ] WS03 Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge  $\Omega$ . Mit  $n(A)$  werde die Anzahl der Elemente in der Menge  $A$  bezeichnet. DREI der folgenden Aussagen sind WAHR? Kreuzen Sie sie an.

- a)  $n(A \cap B) < n(A)$  ( )
- b)  $n(A \cup B) = n(B)$ , wenn  $A \subseteq B$  ( )
- c)  $n(A \cap B) = n(A)$ , wenn  $A \subseteq B$  ( )
- d)  $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$  ( )
- e)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  ( )

[ 10 ] SS03      Unter 90 Personen waren

- 60 Personen, die gern Kaffee trinken,
- 50 Personen, die gern Tee trinken,
- 40 Personen, die gern Milch trinken.

Diese Zahlen schließen

- 35 Personen ein, die gern Kaffee und Tee trinken,
- 25 Personen, die gern Kaffee und Milch trinken,
- 20 Personen, die gern Tee und Milch trinken,

Diese Zahlen wiederum schließen

- 15 Personen ein, die gern Kaffee, Tee und Milch trinken.

Wie viele Personen trinken keins der drei Getränke gern?

Anzahl Personen:

[ 11 ] SS03      Schreiben Sie die folgenden Summen in Summennotation. **Hinweis:** Es ist jeweils die **obere Summationsgrenze** und der **Summand** anzugeben!

a)  $1 + 3 + 5 + \dots + 199 =$

$$\sum_{i=1}$$

b)  $1 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{7} + \frac{x^9}{10} + \dots + \frac{x^{30}}{31} =$

$$\sum_{i=0}$$

[ 12 ] SS03      Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in der gewählten Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt.

a)  $x = 0$  und  $y = 0$              $x^2 + y^2 = 0$

b)  $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$              $x = 3$

c)  $x > z^2$              $x > 0$

[ 13 ] SS03      Drei der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

a)  $\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$       (    )

b)  $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$       (    )

c) Es sei  $A(n)$  eine Aussage über die natürliche Zahl  $n$ . Es gelte  $A(1)$ . Ferner kann man für jede natürliche Zahl  $k$  zeigen: Wenn  $A(k)$  gilt, so gilt auch  $A(k + 1)$ . Unter diesen Voraussetzungen gilt die Aussage  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ .      (    )

d) Die in c) geschilderte Methode heißt „Beweis durch vollständige oder mathematische Induktion“.      (    )

e)  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 j = 6 \cdot \sum_{j=1}^3 j$       (    )

[ 14 ] WS04      Schreiben Sie den Ausdruck

$$1 + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{7} + \dots + \frac{t^{12}}{25}$$

mit dem Summenzeichen.

[ 15 ] WS04      Berechnen Sie die folgenden Summen:

$\sum_{i=1}^{100} 6 =$      

$\sum_{k=0}^3 (k + 1)^{k-1} =$

[ 16 ] WS04 Berechnen Sie die Summe  $\sum_{j=0}^4 j \cdot 2^{j+1} =$

[ 17 ] WS04 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a)  $x = 8$  und  $y = 3 \implies x - y = 5$  ( )
- b)  $x - y = 5 \implies x = 8$  oder  $y = 3$  ( )
- c)  $x^3 + y^3 = 0 \implies x = 0$  und  $y = 0$  ( )
- d)  $(x - 2)(x - 4) < 0 \implies x > 0$  ( )
- e)  $(x - 2)(x - 4) < 0 \iff 2 < x < 4$  ( )

[ 18 ] SS04

DREI der folgenden Aussagen sind ALLGEMEIN GÜLTIG. Kreuzen Sie sie an. Alle auftretenden Summen seien wohl definiert.

- a)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$  ( )
- b)  $\sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^6 a_k$  ( )
- c)  $\sum_{k=m}^n \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\sum_{i=m}^n a_i}{\sum_{j=m}^n b_j}$  ( )
- d)  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = x_1 + x_{n+1} + \sum_{i=2}^n x_i$  ( )
- e)  $\sum_{i=0}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{11} a_i$  ( )

[ 19 ] SS04 Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden, dass die Ungleichung

$$2n + 1 < n^2 < 2^n$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0 = 5$  gültig ist.

a) Zeigen Sie, dass die Ungleichung für das erste Element  $n_0$  gilt. (Induktionsanfang)

Induktionsanfang:

b) Schreiben Sie für diese konkrete Ungleichung die Induktionsvoraussetzung (Induktionshypothese) und die Induktionsbehauptung, die zu zeigen ist, (Induktionsschritt) auf. **HINWEIS:** Hier soll kein Beweis durchgeführt werden.

Induktionshypothese:

Induktionsbehauptung:

[ 20 ] SS04 Berechnen Sie:  $\sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 (i - j) =$



[ 21 ] WS05 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a)  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$  ( )

b) Bei der Berechnung einer Doppelsumme kommt es entscheidend auf die Reihenfolge der Summation an. ( )

c) Bei der Berechnung von  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$  sind  $n \cdot m$  Werte zu addieren. ( )

d) Wenn  $\mu_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i$  ist, dann gilt  $\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x) = 0$ . ( )

e) Wenn  $\mu_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i$  ist, dann gilt  $\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x)^2 = 0$ . ( )

[ 22 ] WS05 Setzen Sie in den folgenden Fällen entweder einen der Implikationspfeile ( $\implies, \impliedby$ ) oder das Zeichen für die Äquivalenzrelation ( $\iff$ ).

$(x - 4)(x + 5) = 0$    $x = 4$

$x \neq 2$  und  $\frac{x-1}{x-2} = 0$    $x = 1$

$0 \leq x < 6$    $x^2 < 36$

[ 23 ] WS05 Gegeben seien die Mengen

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$      $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$      $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

$A \cap (B \cap C) =$

$A \setminus (B \cup C) =$

[ 24 ] SS05, SS08M1

Berechnen Sie die folgende Summe und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{5} i^2 \cdot j =$$

[ 25 ] SS05, SS08M1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a) Jedes mathematische Theorem kann als Implikation  $P \implies Q$  formuliert werden. (  )  
Dabei gibt  $P$  die Voraussetzungen an, während  $Q$  die Schlussfolgerungen enthält.
- b) Man unterscheidet zwischen deduktiven und induktiven Schlussfolgerungen. (  )
- c) Will man die Implikation  $P \implies Q$  beweisen, so kann man einen indirekten Beweis verwenden, d.h. man beweist, dass  $Q$  nicht gilt. (  )
- d) Wenn die Aussage  $P$  die Aussage  $Q$  impliziert, so ist  $P$  eine hinreichende Bedingung für  $Q$ . (  )
- e) Wenn die Aussage  $Q$  aus der Aussage  $P$  folgt, so ist  $P$  eine notwendige Bedingung für  $Q$ . (  )

[ 26 ] (II06) Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge  $\Omega$ . Mit  $n(A)$  werde die Anzahl der Elemente in der Menge  $A$  bezeichnet. DREI der folgenden Aussagen sind WAHR! Kreuzen Sie sie an.

- a)  $n(A \cap B) \leq n(A)$  (  )
- b)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  (  )
- c)  $n(A \cap B) = n(A)$ , wenn  $B \subseteq A$  (  )
- d)  $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$ , wenn  $B \subseteq A$  (  )
- e)  $n(A \cup \Omega) = n(\Omega)$  (  )

[ 27 ] (II06) Berechnen Sie die Summe:  $\sum_{k=1}^3 (-1)^k k^k =$

[ 28 ] (II06) Schreiben Sie die folgende Summe mit Hilfe des Summenzeichens:

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \dots + 2x_{20}y_{20} =$$

[ 29 ] (IV06) Durch Eintragung der entsprechenden Pfeile in die Kästchen werden aus den folgenden Aussagen Äquivalenzen oder Implikationen. Der Pfeil in beide Richtungen ist zu setzen, sofern es sich um eine Äquivalenz handelt. Der Pfeil in eine (gewählte) Richtung ist zu setzen, sofern es sich um eine Implikation handelt.

a)  $x^2 = 9$    $x = -3$

b)  $x^3 > 0$    $x > 0$

c)  $x \in \{1; 2; 3\}$    $x \in \{1; 2; 3; 4\}$

[ 30 ] (IV06) DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

a) Ist die obere Grenze einer Summe kleiner als die untere, gibt es keine Terme. ( )  
Daher ist es allgemeine Konvention diese Summe als Null zu betrachten.

b) Bei einem konstanten Faktor  $c$  hinter dem Summenzeichen kann die Eigenschaft ( )  
der Homogenität der Summe ausgenutzt werden, d.h.  $c$  kann vor das Summen-  
zeichen gezogen werden.

c) Für Doppelsummen gilt:  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$  ( )

d) Nehmen Sie an,  $P$  und  $Q$  seien zwei Aussagen, so dass gilt: Wenn  $P$  wahr ist, so ( )  
ist auch  $Q$  wahr. In diesem Fall spricht man von einer logischen Äquivalenz.

e)  $P \Rightarrow Q$  ist äquivalent zu  $Nicht P \Rightarrow Nicht Q$ . ( )

[ 31 ] SS06, K2 Berechnen Sie die folgenden Summen:

$\sum_{i=1}^5 7 \cdot i^2 =$

$\sum_{i=0}^3 \frac{5 \cdot 2^i}{i+1} =$

[ 32 ] SS06K2M1 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a) Mathematische Induktion bedeutet dasselbe wie logische Äquivalenz. (    )
  - b) Wenn  $n(A)$  die Anzahl der Elemente in einer endlichen Menge ist, so gilt für zwei endliche Mengen  $A$  und  $B$ :  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ . (    )
  - c) Mit den gleichen Bezeichnungen wie in b) gilt:  $n(A \setminus B) \leq n(A)$ . (    )
  - d) Für  $P \implies Q$  sagt man:  $P$  ist eine notwendige Bedingung für  $Q$ . (    )
  - e) Gilt  $P \implies Q$  und  $Q \implies P$ , so sagt man:  $P$  und  $Q$  sind logisch äquivalent. (    )
- 

[ 33 ] SS02, SS06K2M1 Durch Eintragung der entsprechenden Pfeile in die Kästchen werden aus den folgenden Aussagen Äquivalenzen oder Implikationen. Der Pfeil in beide Richtungen ist zu setzen, sofern es sich um eine Äquivalenz handelt. Der Pfeil in eine (gewählte) Richtung ist zu setzen, sofern es sich um eine Implikation in diese Richtung handelt.

- a)  $x = \sqrt{9}$    $x = 3$
  - b)  $x^4 > 0$    $x > 0$
  - c)  $x \in \{1; 2; 3\}$    $x \in \{1; 2; 3; 4\}$
  - d)  $2x(x - 5) = 0$    $x = 0$  ODER  $x = 5$
  - e)  $x^2 + y^2 = 0$    $x = 0$  ODER  $y = 0$
- 

[ 34 ] SS06, K1 DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a)  $x = 0$  oder  $y = 0$  gilt, wenn  $x = 0$  und  $y = 0$  (    )
  - b)  $(5 - x)(y - 3) = 0 \implies y = 3$  (    )
  - c)  $x^3 - y^2 = 0 \implies x = y$  (    )
  - d)  $x^2 - x^3 = 0 \iff x = 1$  (    )
  - e)  $y^4 + x^2 = 0 \implies x = y$  (    )
-

[ 35 ] SS02, SS06K1M1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und **vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.**

a)  $\sum_{k=10}^{20} (2k + 3) =$

b)  $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} =$

c)  $\sum_{j=0}^1 \sum_{i=10}^{13} \frac{i}{j+1} =$

[ 36 ] WS03, SS06K1M1

Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in der gewählten Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt.

a)  $x = 2$  und  $y = -2$    $x + y = 0$

b)  $(x - 3)(x^2 + 2) = 0$    $x = 3$

c)  $x^2 = 9$    $x = 3$

[ 37 ] WS07, K1

Ermitteln Sie den Wert der folgenden Summen:

$\sum_{i=2}^4 (2i^2 - i + 1) =$

$\sum_{i=1}^5 i^2 =$

[ 38 ] WS03, K1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a)  $\binom{60}{58} = \binom{60}{2}$  ( )
- b)  $\binom{12}{1} = 12$  ( )
- c)  $\binom{12}{0} = 0$  ( )
- d)  $\binom{12}{7} = \binom{11}{6} + \binom{11}{7}$  ( )
- e)  $7! = 6! \cdot 6$  ( )
- 

[ 39 ] WS07, M1

Berechnen Sie den Wert der folgenden Doppelsumme.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \frac{2j}{i+2} =$$

---

[ 40 ] WS07, M1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a)  $\sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k cb_i = c \sum_{i=1}^k (a_i + b_i)$  ( )
- b)  $\sum_{i=1}^5 a_i + \sum_{i=6}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} a_i$  ( )
- c)  $\sum_{i=1}^6 a = 6a$  ( )
- d)  $\sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} (10 - i) = \sum_{i=1}^{10} (i + 10 - i) = 100$  ( )
- e)  $\sum_{i=1}^{10} (1 - \sqrt{i})(1 + \sqrt{i}) = \sum_{i=1}^{10} (1 - i) = 1 - \sum_{i=1}^{10} i$  ( )
- 

[ 41 ] WDHWS03, WS07M1

Berechnen Sie:

$$\binom{17}{3} =$$

---

[ 42 ] WS07K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Wenn in der Aussage eine Implikation ( $\implies$  oder  $\impliedby$ ) vorkommt, so gilt diese nur als WAHR, wenn sie nicht durch eine Äquivalenz ( $\iff$ ) ersetzt werden kann. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

- a)  $x > y^4 \implies x > 0$  ( )
  - b)  $x^2 + y^4 = 0 \implies x = 0$  und  $y = 0$ . ( )
  - c)  $x + y = 3 \iff x = -1$  und  $y = 4$ . ( )
  - d)  $3x(x^2 - 4) = 0 \iff x = 0$  oder  $x = 2$ . ( )
  - e)  $(x - 5)(x - 1) < 0 \iff 1 < x < 5$  ( )
- 

[ 43 ] IV07M1

Berechnen Sie die folgende Summe:

$$\sum_{j=3}^6 (2j - 6)^2 =$$

---

[ 44 ] IV07M1

Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen  $\iff$ ,  $\implies$  oder  $\impliedby$  je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in der gewählten Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt. Falls keine Implikation gilt, streichen Sie bitte das Kästchen durch.

a)  $x = 0$  und  $y > 0$

$x^2 + y^2 > 0$

b)  $x > 1$

$x > z \geq 1$

---

[ 45 ] SS07K1

Die Häuptlinge Anton und Bruno konkurrieren um die Gunst ihrer 450 Krieger. Die Menge aller Krieger sei  $\Omega$ . Es sei  $A$  die Menge der Krieger, die Anton mögen und  $B$  die Menge der Krieger, die Bruno mögen. Es gibt 20 Krieger, die weder zu  $A$  noch zu  $B$  gehören. Die Anzahl der Elemente in einer Teilmenge  $C$  von  $\Omega$  sei mit  $n(C)$  bezeichnet. Folgendes sei bekannt:

$$n(B \setminus A) = \frac{n(A \setminus B)}{2} \quad n(A \cap B) = 20 \cdot n(A \setminus B)$$

Berechnen Sie die folgenden Anzahlen und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis durch ein mit Namen und Zahlen beschriftetes Venn-Diagramm.

$$n(A \setminus B) = \boxed{\phantom{0000}} \quad n(B \setminus A) = \boxed{\phantom{0000}} \quad n(A \cap B) = \boxed{\phantom{0000}}$$

Venn-Diagramm:



[ 46 ] SS07K2

Berechnen Sie die folgende Summe für  $a = 2$ . **Hinweis:** Schreiben Sie zunächst die einzelnen Summanden auf und überlegen Sie, welche Potenzen von  $a = 2$  Sie benötigen. Zur Hilfe seien Ihnen die folgenden Zahlen gegeben:

2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192

$$\sum_{i=1}^3 (a^{i+1})^i = \boxed{\phantom{00000000}}$$

[ 47 ] SS07M1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

- a) Ist  $P$  eine notwendige Bedingung für  $Q$ , so schreibt man  $P \implies Q$ . ( )
- b) Ist  $P$  hinreichend für  $Q$  und  $Q$  notwendig für  $P$ , so schreibt man  $P \iff Q$ . ( )
- c) Ist  $P$  hinreichend und notwendig für  $Q$ , so ist auch  $Q$  hinreichend und notwendig für  $P$ . ( )
- d) Ist  $P$  hinreichend und notwendig für  $Q$ , so schreibt man:  $P \iff Q$ . ( )
- e) Ist  $P$  hinreichend und notwendig für  $Q$ , so sagt man auch:  $P$  gilt dann und nur dann, wenn  $Q$  gilt. ( )



[ 48 ] SS07M1

Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in der gewählten Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt.

a)  $x = 1$  und  $y = 1$    $x^2 + y^2 = 2$

b)  $(x - 3)^2 = 0$    $x = 3$

[ 49 ] WS08K1

Ein Student der Wirtschaftswissenschaften möchte mit Hilfe der mathematischen Induktion folgende Aussage  $A(n)$  beweisen:

$$A(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

Geben Sie die Gleichung für den Induktionsanfang an und zeigen Sie, dass beide Seiten der Gleichung dasselbe Ergebnis liefern.

$A(1) :$

Nachdem er die Induktionshypothese

$$A(k) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$$

aufgestellt hat, möchte er den zweiten Induktionsschritt durchführen. Geben Sie den Ausdruck an, den er auf beiden Seiten addieren muss.

Im Anschluss führt er den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion durch und formt das Ergebnis der rechten Seite der Gleichung soweit um, dass es als Beweis für die Ausgangsgleichung gilt. Geben Sie den Ausdruck der rechten Seite der Gleichung für  $A(k + 1)$  an.

$A(k+1) :$   $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) =$

[ 50 ] WS08M1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR, d.h. sie sind ALLGEMEIN GÜLTIG. Kreuzen Sie sie an. Alle auftretenden Summen seien wohl definiert.

a)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$  ( )

b)  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = x_1 + x_{n+1} + \sum_{i=2}^n x_i$  ( )

c)  $\sum_{i=0}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{11} a_i$  ( )

d)  $\sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^6 a_k$  ( )

e)  $\sum_{k=m}^n \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\sum_{i=m}^n a_i}{\sum_{j=m}^n b_j}$  ( )

[ 51 ] WS08K2

Es sei  $A = \{2, 4, 6\}$  und  $B = \{1, 2, 3\}$ . Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

$A \cap B =$

$(A \cap B) \setminus (A \cup B) =$

[ 52 ] WS08K2

Schreiben Sie die folgende Summe in Summennotation. **Hinweis:** Geben Sie die **obere Summationsgrenze** sowie den **Summanden** an!

$\frac{a^3}{10b^2} + \frac{a^4}{13b^3} + \frac{a^5}{16b^4} + \dots + \frac{a^{10}}{31b^9} =$   $\sum_{i=3}$

[ 53 ] SS08K1

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an. Die Mengen  $A$  und  $B$  seien Teilmengen der Grundmenge  $\Omega$ . Ferner sei  $x \in \Omega$ .

a) Falls  $x \notin A$ , so gilt  $x \in \Omega \setminus A$ . ( )

b)  $\Omega \setminus A = \mathcal{C}A$  heißt das Komplement von  $A$ . ( )

c) Falls  $x \in A$  und  $x \in B$ , so gilt  $x \in B \setminus A$ . ( )

d)  $\mathcal{C}\emptyset = \Omega$ . ( )

e) Ist  $n(A)$  die Anzahl der Elemente in der Menge  $A$ , so gilt  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ . ( )

[ 54 ] SS08K2

Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\binom{9}{3} = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\binom{16}{14} = \boxed{\phantom{000}}$$

---

[ 55 ] WS09K1

Eine Befragung von 200 Studierenden der Betriebswirtschaftslehre ergab, dass 100 von ihnen gerne die Mathematik-Vorlesung besuchen. 80 Studierende gaben an, gerne an der Statistik-Vorlesung teilzunehmen. 70 Studierende sagten aus, dass sie weder die Mathematik-Vorlesung noch die Statistik-Vorlesung gerne besuchen. Wie groß ist die Anzahl  $N$  der befragten Studierenden, die beide Vorlesungen gerne besuchen?

$$N = \boxed{\phantom{000}}$$

---

[ 56 ] WS09K2

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie sie an.

In dieser Aufgabe sind  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen, so dass alle folgenden Ausdrücke definiert sind.

a)  $a! = a \cdot (a - 1)!$  ( )

b)  $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$  ( )

c)  $\binom{a}{0} = 0$  ( )

d)  $\binom{b}{1} = b$  ( )

e)  $\binom{a}{a-1} = a - 1$  ( )

---

[ 57 ] SS09K2

Berechnen Sie  $\sum_{i=1}^4 (p_i q_i)$ , wenn  $p_i$  und  $q_i$  durch die folgende Tabelle gegeben sind:

$i$	1	2	3	4
$p_i$	2	1	3	6
$q_i$	5	10	4	3

$$\sum_{i=1}^4 (p_i q_i) =$$

[ 58 ] **SS09K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Binomialkoeffizienten* .

- a) Binomialkoeffizienten  $\binom{m}{k}$  sind nur für  $m = 1, 2, \dots$  und  $k = 1, 2, \dots, m$  definiert.
- b) Es gilt  $\binom{m}{m} = \binom{m}{1}$ .
- c)  $\binom{m}{1} = m$
- d)  $\binom{m}{m} = 1$
- e) Für  $m \geq 3$  gilt  $\binom{m}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ .

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a,b,c | a,c,d | a,c,e | b,d,e | c,d,e |
| (   ) | (   ) | (   ) | (   ) | (   ) |

[ 59 ] **X09M1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Rechenregeln aus der Mengenlehre*. Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge  $\Omega$ . Mit  $n(A)$  werde die Anzahl der Elemente in der Menge  $A$  bezeichnet.

- a)  $n(A \cap B) \leq n(A)$
- b)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- c)  $n(A \cap B) = n(A)$ , wenn  $B \subseteq A$
- d)  $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$ , wenn  $B \subseteq A$
- e)  $n(A \cup \Omega) = n(\Omega)$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| a,b,d  | a,b,e  | a,d,e  | b,d,e  | c,d,e  |
| (    ) | (    ) | (    ) | (    ) | (    ) |
- 

[ 60 ] **WS10K1**

Die folgenden Summen seien gegeben:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 54 \qquad \sum_{i=1}^n y_i = 144 \qquad \sum_{i=1}^n x_i y_i = 924$$

Bestimmen Sie die folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{3} \cdot \frac{y_i}{4} \right) =$$

---

[ 61 ] **WS10K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Logik*.

- a) Wenn das Gras nass ist, regnet es.
- b) Wenn es regnet, wird das Gras nass.
- c) Ist  $P$  eine hinreichende Bedingung für  $Q$ , so schreibt man  $P \Leftarrow Q$ .
- d) Gilt  $P \Rightarrow Q$ , so sagt man: Aus  $P$  folgt  $Q$ .
- e) Gilt  $P \Leftrightarrow Q$ , so sagt man:  $P$  gilt dann und nur dann, wenn  $Q$  gilt.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

a,b,d

(    )

a,d,e

(    )

b,c,d

(    )

b,c,e

(    )

b,d,e

(    )

---

[ 62 ] **II09M1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Rechenregeln für Summen*.

a) 
$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

b) 
$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = x_1 + x_{n+1} + \sum_{i=2}^n x_i$$

c) 
$$\sum_{i=0}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{11} a_i$$

d) 
$$\sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^6 a_k$$

e) 
$$\sum_{k=m}^n \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\sum_{i=m}^n a_i}{\sum_{j=m}^n b_j}$$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| a,b,c  | a,d,e  | b,c,d  | b,d,e  | c,d,e  |
| (    ) | (    ) | (    ) | (    ) | (    ) |

[ 63 ] **SS10,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Rechenregeln für Summen*.

a) Es gilt die Additivität für Summen, d.h.  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

b) Wegen der in a) erwähnten Additivität gilt  $\sum_{i=1}^n (a + b_i) = a + \sum_{i=1}^n b_i$

c) Für Summen gilt die Homogenität, d.h.  $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

d)  $\sum_{i=1}^n 2 = 2n$

e)  $\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i/b_i)$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

a,b,e	a,c,d	a,c,e	b,c,d	b,d,e
(    )	(    )	(    )	(    )	(    )

---

[ 64 ] **SS10,K2**

Durch Eintragung der entsprechenden Pfeile in die Kästchen werden aus den folgenden Aussagen Äquivalenzen oder Implikationen:

Der Pfeil in beide Richtungen ist zu setzen, sofern es sich um eine Äquivalenz handelt.

Der Pfeil in eine (gewählte) Richtung ist zu setzen, sofern es sich um eine Implikation in diese Richtung handelt.

Setzen Sie die entsprechenden Pfeile:

$x = 4$    $\sqrt{x} = 2$

$x^2 = 4$    $x = 2$

---



[ 65 ] **WS11,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Binomialkoeffizienten und Fakultäten*.

a)  $\binom{m}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$  und  $m \geq 3$ .

b)  $\binom{240}{239} = 239$

c)  $\binom{18}{16} = \binom{18}{2} = 9 \cdot 17$

d)  $7! = 7 \cdot 6!$

e)  $\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

a,b,c

( )

a,b,d

( )

a,d,e

( )

b,c,e

( )

c,d,e

( )

[ 66 ] **WS11,K2**

Die folgenden Summen seien gegeben:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 54$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 144$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 384$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 2364$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 924$$

Bestimmen Sie die folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 =$$

[ 67 ] SS11,K1 Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Aspekten der Logik*. Dazu seien  $P$  und  $Q$  Aussagen.

- a)  $P \implies Q$  bedeutet, wenn  $Q$  gilt, gilt auch  $P$ .
- b)  $P \iff Q$  ist gleichbedeutend mit  $P \implies Q$  und  $Q \implies P$ .
- c)  $P \implies Q$  ist gleichbedeutend mit der Redewendung:  $P$  ist notwendig für  $Q$ .
- d)  $P \iff Q$  bedeutet:  $P$  ist notwendig und hinreichend für  $Q$ .
- e)  $P \implies Q$  ist äquivalent zu: Wenn  $Q$  nicht gilt, gilt auch  $P$  nicht.

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| a,b,e  | a,c,d  | a,c,e  | b,c,d  | b,d,e  |
| (    ) | (    ) | (    ) | (    ) | (    ) |
- 

[ 68 ] SS11,K2

Die Mengen  $A$  und  $B$  seien Teilmengen der Grundmenge  $\Omega$ . Mit  $n(A), n(B), \dots$  sei die Anzahl der Elemente in  $A$ , in  $B, \dots$  bezeichnet. Es gelte

$$n(\Omega) = 200 \quad n(A) = 50 \quad n(B) = 70 \quad n(A \cap B) = 30$$

Bestimmen Sie  $n(\Omega \setminus (A \cup B))$ .

$$n(\Omega \setminus (A \cup B)) =$$

---

[ 69 ] **WS11,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Logik*.

- a)  $x^2 > 0 \iff x > 0$
- b)  $x = 0$  und  $y = 0 \iff x^2 + y^2 = 0$
- c)  $x = 0$  und  $y = 0 \iff x^2 \cdot y^2 = 0$
- d)  $3x(x - 2) = 0 \iff x = 0$  oder  $x = 2$
- e) Aus  $x^2 = 16$  folgt nicht  $x = 4$ .

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

a,b,e

 ( )

a,c,d

 ( )

a,c,e

 ( )

b,c,d

 ( )

b,d,e

 ( )

[ 70 ] **WS11,K2**

Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\binom{9}{6} =$$

$$\binom{16}{14} =$$

[ 71 ] **SS12,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Mengenlehre*. Dazu seien  $A, B$  und  $C$  Teilmengen einer Grundmenge  $\Omega$ . Mit  $n(A)$  sei die Anzahl der Elemente in  $A$  bezeichnet. Es gelte  $n(\Omega) < \infty$ .

- a) Für  $A^c = \Omega \setminus A$  gilt  $n(A^c) = n(\Omega \setminus A) = n(\Omega) - n(A)$ .
- b)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- c)  $n(A \cap B) \leq n(A)$
- d)  $n(A) = n(A \cup B) - n(B \setminus A)$
- e)  $n(A \cap B) > 0$  für alle  $A$  und  $B$ .

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| a,b,e  | a,c,d  | a,c,e  | b,c,d  | b,d,e  |
| (    ) | (    ) | (    ) | (    ) | (    ) |
- 

[ 72 ] **SS12,K2**

Berechnen Sie die Doppelsumme

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (i \cdot j + 1)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (i \cdot j + 1) =$$

---

[ 73 ] **WS13,K1** Die folgenden Aussagen befassen sich mit *Rechenregeln für Summen*.

a)  $\sum_{i=1}^{10} c = 10c$

b)  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2$

c)  $\sum_{i=1}^n (a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$

d)  $\sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$

e)  $\sum_{i=1}^n (2 + a_i) = 2 + \sum_{i=1}^n a_i$

Kreuzen Sie jetzt **genau eine** der folgenden fünf Möglichkeiten an:

**WAHR** sind die folgenden Aussagen:

a,b,c

(    )

a,b,d

(    )

a,d,e

(    )

b,c,e

(    )

c,d,e

(    )

[ 74 ] **WS13,K2**

Die Mengen  $A$  und  $B$  seien Teilmengen der Grundmenge  $\Omega$ . Mit  $n(A), n(B), \dots$  sei die Anzahl der Elemente in  $A$  bzw. in  $B$  bezeichnet. Es gelte

$$n(\Omega) = 200 \quad n(B) = 80 \quad n(A \cap B) = 30 \quad n((A \cup B)^c) = 20$$

Bestimmen Sie  $n(A)$ .

$n(A) =$