

Prof. Dr. Fred Böker

10.04.2012

**Klausur zur Vorlesung Fortgeschrittene Mathematik: Optimierung  
(WS 2011/2012)****Gesamtpunktzahl: 50****Aufgabe 1 (Punkte: 7)**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 + (3 - x)^2$$

**a) (Punkte: 2)**Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion  $f$ .

Lösung:  $f'_x(x, y) = 2 \cdot (y - x^2) \cdot (-2x) + 2 \cdot (3 - x) \cdot (-1) = -4x(y - x^2) - 2(3 - x)$   
 $f'_y(x, y) = 2(y - x^2) = 0 \iff y = x^2$

Einsetzen von  $y = x^2$  in  $f'_x(x, y)$  ergibt  $f'_x(x, y) = 0 \iff x = 3$ . Damit ist  $y = 3^2 = 9$ . Der einzige stationäre Punkt ist  $(3, 9)$ .

**b) (Punkte: 3)**

Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, dass die hinreichenden Bedingungen für einen lokalen Extrempunkt erfüllt sind.

Lösung:  $f'_x(x, y) = 4x^3 - 4xy + 2x - 6 \implies f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4y + 2$  und  $f''_{xy}(x, y) = -4x$ . Ferner ist  $f''_{yy}(x, y) = 2 > 0$ . Damit ist  $A = f''_{xx}(3, 9) = 12 \cdot 3^2 - 4 \cdot 9 + 2 = 74 > 0$ ;  $B = f_{xy}(3, 9) = -4 \cdot 3 = -12$ ;  $C = f''_{yy}(3, 9) = 2$  und  $AC - B^2 = 74 \cdot 2 - 12^2 = 148 - 144 > 0$ . Da  $A > 0$  und  $AC - B^2 > 0$ , ist  $(3, 9)$  ein lokaler Minimumpunkt.

**c) (Punkte: 1)**

Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, dass die hinreichenden Bedingungen für einen globalen Extrempunkt nicht erfüllt sind.

Lösung: Damit  $(3, 9)$  ein globaler Minimumpunkt ist, müsste  $f''_{xx}(x, y) \geq 0$  für alle  $(x, y)$ . Dies ist nicht der Fall, denn z.B. für  $x = 0$  und  $y = 1$  ist  $f''_{xx}(0, 1) = -4 + 2 < 0$ .

**d) (Punkte: 1)**

Zeigen Sie mit einem anderen Argument: Obwohl nach c) die hinreichenden Bedingungen für einen globalen Extrempunkt nicht erfüllt sind, liegt doch ein globaler Extrempunkt vor.

Lösung: Es gilt: Als Summe von zwei Quadraten ist  $f(x, y) \geq 0$ . Da  $f(3, 9) = 0$ , ist dies ein globaler Minimumpunkt.

**Aufgabe 2 (Punkte: 9)**

Die Funktion

$$f(x, y) = 8x + 5y + xy - 2x^2 - y^2 - 10$$

soll unter der Nebenbedingung  $x + y = 31$  maximiert werden.

## a) (Punkte: 3)

Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und geben Sie alle Punkte an, die die notwendigen Bedingungen für einen Maximumpunkt erfüllen.

Bestimmen Sie auch den zugehörigen Wert des Lagrangemultiplikators  $\lambda$ .

Lösung: Die Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(x, y) = 8x + 5y + xy - 2x^2 - y^2 - 10 - \lambda(x + y - 31)$$

Die notwendigen Bedingungen sind

$$\text{i) } \mathcal{L}'_x(x, y) = 8 + y - 4x - \lambda = 0 \iff \lambda = 8 + y - 4x$$

$$\text{ii) } \mathcal{L}'_y(x, y) = 5 + x - 2y - \lambda = 0 \iff \lambda = 5 + x - 2y$$

$$\text{iii) } x + y = 31$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für  $\lambda$  aus i) und ii) ergibt

$$8 + y - 4x = 5 + x - 2y \iff 5x - 3y = 3$$

Indem wir das Dreifache der Nebenbedingung zu  $5x - 3y = 3$  addieren, erhalten wir  $8x = 96 \iff x = 12$ . Aus der Nebenbedingung folgt dann  $y = 31 - 12 = 19$ . Damit ist  $(12, 19)$  der einzige Punkt, der die notwendigen Bedingungen erfüllt.

Aus i) folgt  $\lambda = 8 + 19 - 4 \cdot 12 = 27 - 48 = -21$ .

## b) (Punkte: 3)

Zeigen Sie mit Hilfe der berandeten Hesse-Determinante(n), dass die hinreichenden Bedingungen für einen lokalen Maximumpunkt erfüllt sind.

Lösung: Für die berandeten Hesse-Determinanten brauchen wir die partiellen Ableitung der Nebenbedingungsfunktion  $g(x, y) = x + y$  und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Lagrangefunktion.

$$\begin{array}{ll} g'_x(x, y) = 1 & g'_y(x, y) = 1 \\ \mathcal{L}''_{xx}(x, y) = -4 & \mathcal{L}''_{xy}(x, y) = 1 \\ \mathcal{L}''_{yx}(x, y) = 1 & \mathcal{L}''_{yy}(x, y) = -2 \end{array}$$

Wir benötigen hier nur  $B_2(12, 19)$  und

$$B_2(12, 19) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-2-1) + 1(1+4) = 8$$

Da  $(-1)^2 B_2(12, 19) = 1 \cdot 8 = 8 > 0$ , liegt nach Theorem 3.4.18b) aus FMEA ein lokaler Maximumpunkt vor.

## c) (Punkte: 2)

Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion konvex bzw. konkav ist. Sind die hinreichenden Bedingungen für ein globales Maximum somit erfüllt?

Lösung: Nach Theorem 14.5.1 ist zu zeigen, dass die Lagrangefunktion die Bedingungen aus Theorem 13.2.1(a) erfüllt. Die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion sind bereits in b) berechnet worden. Es gilt  $\mathcal{L}''_{xx}(x, y) = -4 < 0$  und  $\mathcal{L}''_{yy}(x, y) = -2 < 0$  und  $\mathcal{L}''_{xx}(x, y)\mathcal{L}''_{yy}(x, y) - (\mathcal{L}''_{xy}(x, y))^2 = (-4) \cdot (-2) - 1^2 = 8 - 1 = 7 > 0$ . Damit sind alle Bedingungen aus Theorem 13.2.1(a) erfüllt, d.h. die Lagrangefunktion ist konkav und  $(12, 19)$  ist ein globaler Maximumpunkt.

## d) (Punkte: 1)

Wie groß ist der Maximalwert?

Um wieviel ändert sich ungefähr der Optimalwert, wenn die Konstante in der Nebenbedingung um 0.2 erhöht wird?

Lösung: Der Maximalwert ist  $f(x^*, y^*) = 8x^* + 5y^* + x^*y^* - 2(x^*)^2 - (y^*)^2 - 10 = 8 \cdot 12 + 5 \cdot 19 + 12 \cdot 19 - 2 \cdot 12^2 - 19^2 - 10 = 96 + 95 + 228 - 288 - 361 - 10 = -240$ .

Die Änderung des Optimalwertes ist ungefähr  $\lambda \cdot 0.2 = -21 \cdot 0.2 = -4.2$ .

**Aufgabe 3 (Punkte: 15)**

Die Zielfunktion

$$f(x, y) = x^2y \quad x \geq 0, y \geq 0$$

soll unter den folgenden Nebenbedingungen maximiert werden.

$$x + y \leq 60 \quad \text{und} \quad x + 2y \leq 90$$

## a) (Punkte: 4)

Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

Geben Sie die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen unter Berücksichtigung der Nicht-negativitätsbedingungen an. Verwenden Sie dabei nur zwei Lagrangemultiplikatoren.

Lösung: Die Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2y - \lambda_1(x + y - 60) - \lambda_2(x + 2y - 90)$$

Die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen sind:

i)  $\mathcal{L}'_x(x, y) = 2xy - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, (= 0, \text{ falls } x > 0)$

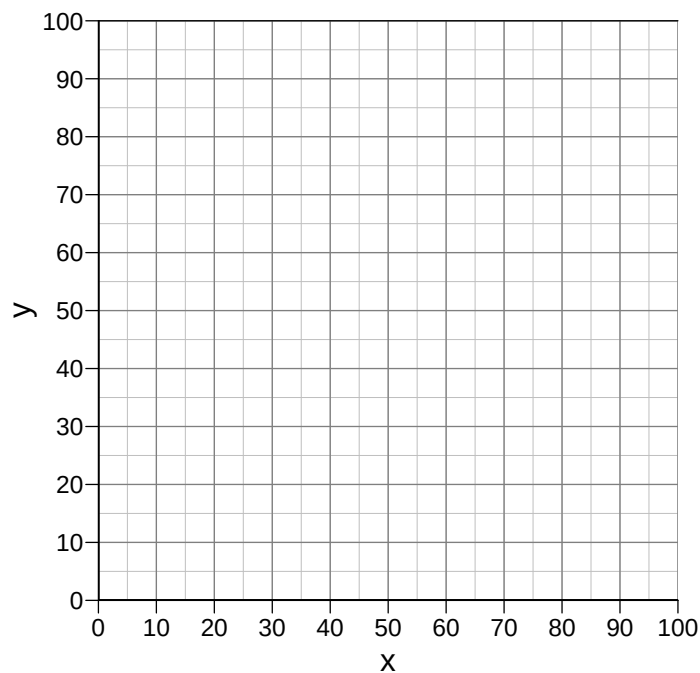
ii)  $\mathcal{L}'_y(x, y) = x^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, (= 0, \text{ falls } y > 0)$

iii)  $\lambda_1 \geq 0, (= 0, \text{ falls } x + y < 60)$

iv)  $\lambda_2 \geq 0, (= 0, \text{ falls } x + 2y < 90)$

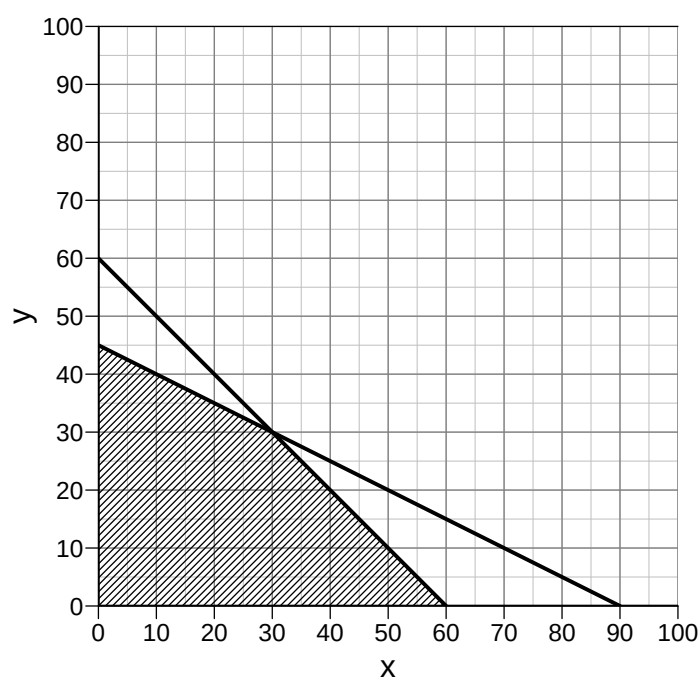
## b) (Punkte: 2)

Begründen Sie, warum das Problem eine Lösung hat. Skizzieren Sie dazu die zulässige Menge in der folgenden Abbildung.



Lösung: Die Zielfunktion ist stetig und die zulässige Menge ist abgeschlossen und beschränkt (siehe Abbildung, wo der zulässige Bereich schraffiert ist). Nach dem Extremwertsatz gibt es dann einen Maximumpunkt.

Zur Konstruktion des zulässigen Bereichs: Die erste Nebenbedingung ist nach oben begrenzt durch die Gerade  $y = -x + 60$ , die zweite durch die Gerade  $y = -\frac{x}{2} + 45$ .



## c) (Punkte: 7)

Begründen Sie zunächst, dass das Maximum nicht für  $x = 0$  oder  $y = 0$  angenommen werden kann.

Was bedeutet das für die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen?

Bestimmen Sie dann alle möglichen Lösungskandidaten, indem Sie die im Buch und in der Vorlesung empfohlene Fallunterscheidung verwenden.

Geben Sie auch immer den zugehörigen Wert von  $\lambda$  und den Wert der Zielfunktion an.

Welcher Kandidat löst das Problem?

Lösung: Wenn  $x = 0$  oder  $y = 0$  hat die Zielfunktion den Wert 0. Dies ist sicherlich nicht das Maximum, denn für zulässige  $x > 0$  und  $y > 0$  ist der Wert der Zielfunktion  $> 0$ . Für die Kuhn-Tuckerbedingungen in i) und ii) folgt:

$$\text{i) } \mathcal{L}'_x(x, y) = 2xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\text{ii) } \mathcal{L}'_y(x, y) = x^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

Wir machen die Fallunterscheidung:

(I) *Beide Nebenbedingungen sind bindend.* Dann ist

$$x + y = 60$$

$$x + 2y = 90$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten und erhalten  $y = 30$ . Aus der ersten Gleichung folgt dann  $x = 30$ . Einsetzen in (i) und (ii) ergibt

$$1800 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 + \lambda_2 = 1800$$

$$900 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 + 2\lambda_2 = 900$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten und erhalten  $\lambda_2 = -900 < 0$ . Dies widerspricht Bedingung iii), d.h. es gibt keinen Lösungskandidaten in diesem Fall.

(II) *Nebenbedingung 1 ist bindend, 2 ist nicht bindend.* Dann ist  $x + y = 60$  und  $x + 2y < 90$ . Aus iv) folgt  $\lambda_2 = 0$ . Aus i) und ii) folgt  $\lambda_1 = 2xy$  und  $\lambda_1 = x^2$ . Daraus folgt  $2xy = x^2$  und somit  $y = x/2$ . Einsetzen in die erste Nebenbedingung ergibt

$$x + \frac{x}{2} = 60 \iff \frac{3}{2}x = 60 \iff x = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \implies y = \frac{40}{2} = 20$$

Dann ist  $\lambda_1 = x^2 = 40^2 = 1600 \geq 0$  und  $x + 2y = 40 + 40 = 80 < 90$ , so dass alle notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Wir haben einen Kandidaten  $(x^*, y^*) = (40, 20)$  mit  $\lambda_1 = 1600$  und  $\lambda_2 = 0$ . Der Wert der Zielfunktion ist  $40^2 \cdot 20 = 32000$ .

(III) *Nebenbedingung 1 ist nicht bindend, 2 ist bindend.* Dann ist  $x + y < 60$  und  $x + 2y = 90$ . Aus iii) folgt  $\lambda_1 = 0$ . Aus i) und ii) folgt  $\lambda_2 = 2xy$  und  $2\lambda_2 = x^2$ . Daraus folgt  $x^2 = 4xy$  und somit  $x = 4y$ . Einsetzen in die zweite Nebenbedingung ergibt  $4y + 2y = 90 \iff 6y = 90 \iff y = 15 \implies x = 4 \cdot 15 = 60$ .

Dann ist aber  $x + y = 60 + 15 = 75 > 60$ , d.h. die erste Nebenbedingung ist nicht erfüllt.

(IV) *Beide Nebenbedingungen sind nicht bindend.* Dann folgt aus iii) und iv)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Aus ii) folgt  $x = 0$ . Dies kann nicht zum Maximum führen, so dass es keinen weiteren Kandidaten gibt.

Wir haben einen Kandidaten gefunden:  $(x^*, y^*) = (40, 20)$  mit  $\lambda_1 = 1\,600$  und  $\lambda_2 = 0$ . Der Wert der Zielfunktion ist  $40^2 \cdot 20 = 32\,000$ .

d) **(Punkte: 2)**

Um wieviel ändert sich der Optimalwert ungefähr, wenn die Konstanten in beiden Nebenbedingungen jeweils um 2 erhöht werden?

Lösung: Die Änderung ist ungefähr  $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \cdot 1\,600 + 2 \cdot 0 = 3\,200$ .

#### Aufgabe 4 (Punkte: 19)

Betrachten Sie das lineare Programmierungsproblem

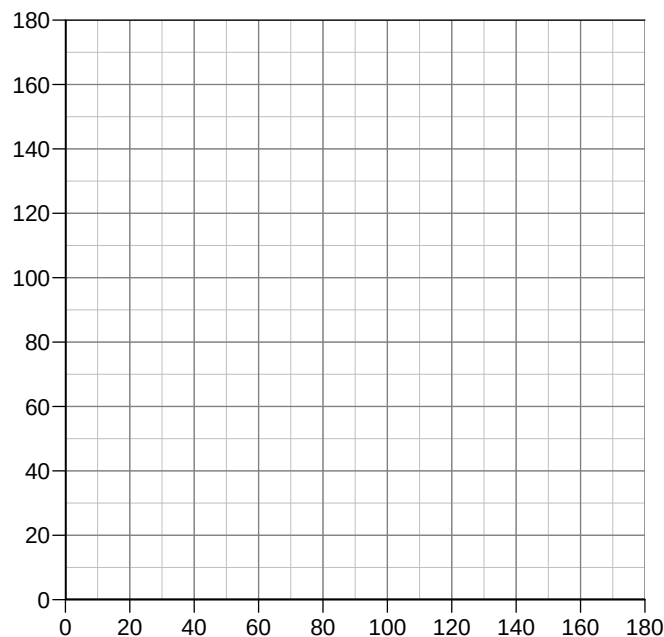
$$\max 30x_1 + 40x_2 \quad \text{unter} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 & \text{(I)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 160 & \text{(II)} \\ x_2 \leq 50 & \text{(III)} \end{cases}$$

a) **(Punkte: 4)**

Lösen Sie das Problem grafisch, indem Sie das folgende Koordinatensystem verwenden.

Geben Sie die Koordinaten des Lösungspunktes exakt an, indem Sie den Schnittpunkt zweier geeigneter Geraden bestimmen.

Geben Sie auch den Optimalwert der Zielfunktion an.



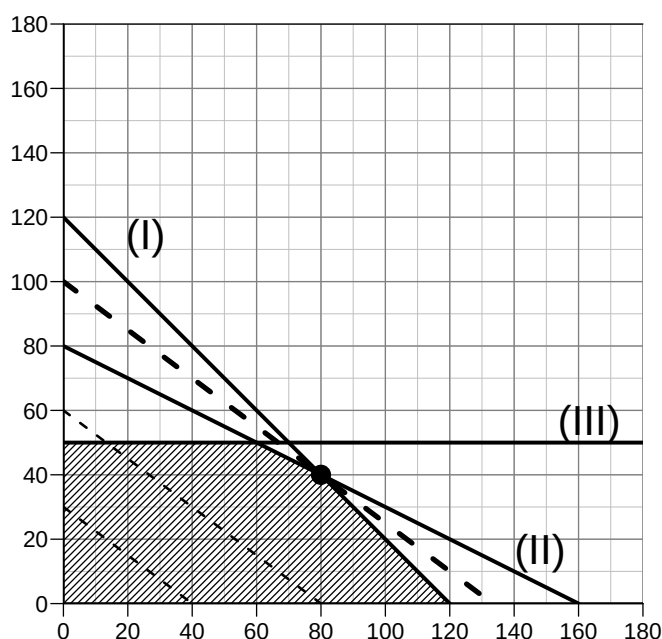
Lösung: Zu (I) gehört als Begrenzung die Gerade  $x_1 + x_2 = 120$ . Die Schnittpunkte mit den Achsen sind  $(0, 120)$  und  $(120, 0)$ . Zu (II) gehört die Gerade  $x_1 + 2x_2 = 160$

mit den Achsenabschnitten  $(0, 80)$  und  $(160, 0)$ . Die dritte Nebenbedingung wird nach oben durch die waagerechte Gerade  $x_2 = 50$  begrenzt. Der zulässige Bereich liegt unter allen drei Geraden und ist in der Abbildung schraffiert. Die Zielfunktion hat die Gestalt  $x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + c$ , d.h. es ist eine Gerade mit der Steigung  $-3/4$ . Es sind drei gestrichelte Geraden mit der Steigung  $-3/4$  eingezeichnet. Die obere Gerade hat genau einen Punkt mit dem zulässigen Bereich gemeinsam und hat den höchsten Wert von  $c$ . Die Lösung ist also der Schnittpunkt der Geraden

$$x_1 + x_2 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 = 160$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten abziehen, erhalten wir  $x_2 = 40$ . Aus der ersten Gleichung folgt  $x_1 = 120 - x_2 = 120 - 40 = 80$ .



Der Optimalwert der Zielfunktion ist  $30x_1^* + 40x_2^* = 30 \cdot 80 + 40 \cdot 40 = 2\,400 + 1\,600 = 4\,000$ .

**b) (Punkte: 2)**

Formulieren Sie das zu dem obigen Problem duale Problem.

Welchen Optimalwert erwarten Sie für die Zielfunktion im dualen Problem.

Lösung: Das duale Problem ist

$$\min 120u_1 + 160u_2 + 50u_3 \quad \text{unter} \quad \begin{cases} u_1 + u_2 & \geq 30 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 & \geq 40 \end{cases}$$

Nach dem Dualitätstheorem sollte der Optimalwert der Zielfunktion im dualen Problem gleich dem Optimalwert im primären Problem, also 4 000 sein.

## c) (Punkte: 3)

Lösen Sie das duale Problem, indem Sie die komplementären Schlupfbedingungen verwenden.

Stimmt Ihre Erwartung aus b) bezüglich des Optimalwertes?

Lösung: Da  $x_1^* > 0$  und  $x_2^* > 0$ , sind beide Ungleichungen im dualen Problem mit Gleichheit erfüllt. Da  $x_2^* = 40 < 50$ , ist die dritte Nebenbedingung nicht bindend, d.h.  $u_3^* = 0$ , d.h. wir haben die beiden Gleichungen

$$u_1 + u_2 = 30$$

$$u_1 + 2u_2 = 40$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten Gleichung abziehen, erhalten wir  $u_2^* = 10$ . Aus der ersten Gleichung folgt  $u_1^* = 30 - u_2^* = 30 - 10 = 20$ .

Der Optimalwert ist  $120 \cdot u_1^* + 160 \cdot u_2^* + 50 \cdot u_3^* = 120 \cdot 20 + 160 \cdot 10 + 50 \cdot 0 = 2\,400 + 1\,600 = 4\,000$ . So soll es nach dem Dualitätstheorem sein.

## d) (Punkte: 4)

Lösen Sie das primäre Problem nach der Simplex-Methode, indem Sie die Matrix-Schreibweise verwenden.

Lesen Sie aus der Endform der Matrix die Lösungen des primären und des dualen Problems, den Wert der Zielfunktion sowie die Werte der Schlupfvariablen ab.

Lösung: Die Ausgangsmatrix für das Simplexverfahren ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -30 & -40 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 50 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Wir wählen die 6. Spalte als Pivotspalte. Das eingerahmte Element ist das Pivotelement.

Wir addieren das 40-fache der vierten Zeile zur ersten Zeile, subtrahieren die vierte Zeile von der zweiten Zeile und subtrahieren das Doppelte der vierten Zeile von der dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 40 & -30 & 0 & 2\,000 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \boxed{1} & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 50 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Die 5. Spalte ist die Pivotspalte und das eingerahmte Element ist das Pivotelement.

Wir addieren das 30-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile und subtrahieren die dritte Zeile von der zweiten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & -20 & 0 & 0 & 3\,800 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 50 \end{pmatrix} \quad (3)$$



Die 4. Spalte ist die Pivotspalte und das eingerahmte Element ist das Pivotelement.

Wir addieren das 20-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile und das Doppelte der zweiten Zeile zur dritten Zeile. Wir subtrahieren die zweite Zeile von der vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{20} & \boxed{10} & 0 & 0 & 0 & 4\,000 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{pmatrix} \quad (4)$$

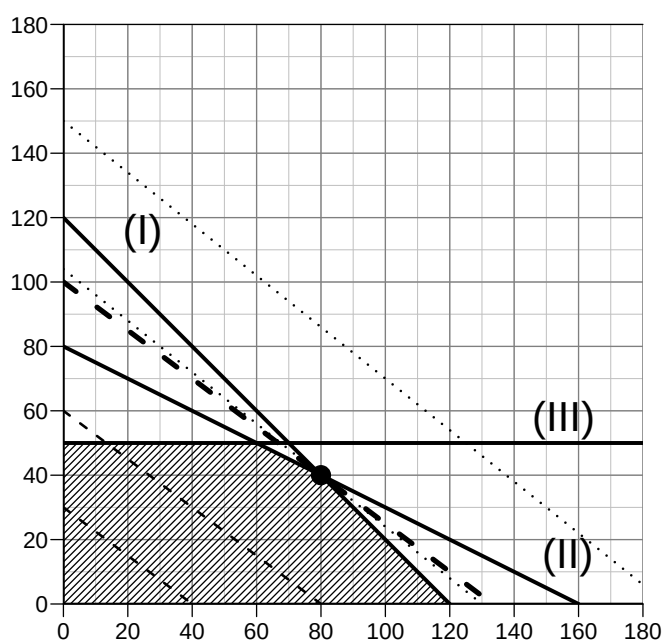
Die Lösung des primären Problems ist  $x_1^* = 80, x_2^* = 40, y_1 = y_2 = 0, y_3 = 10$ . Die Lösung des dualen Problems ist  $u_1^* = 20, u_2^* = 10, u_3^* = 0$ .

e) **(Punkte: 3)**

Wie ändert sich der Optimalwert der Zielfunktion, wenn Sie die Wertschöpfungskoeffizienten  $c_1 = 30, c_2 = 40$  in der Zielfunktion  $c_1x_1 + c_2x_2 = 30x_1 + 40x_2$  um  $\Delta c_1 = \Delta c_2 = 10$  erhöhen?

Verwenden Sie zur Beantwortung dieser Frage ein Resultat der Vorlesung. Argumentieren Sie jedoch zunächst, dass das Resultat der Vorlesung anwendbar ist, d.h. dass die Lösungen des primären Problems sich bei diesen Änderungen der Wertschöpfungskoeffizienten nicht ändern. **Hinweis:** Die Lösungsgrafik zu a) könnte Ihnen bei dieser Argumentation hilfreich sein.

Lösung: Voraussetzung des Resultats der Vorlesung ist, dass sich der Lösungspunkt des primären Problems  $(x_1^*, x_2^*) = (80, 40)$  nicht ändert. Der zulässige Bereich bleibt unverändert. Es ändert sich nur die Steigung der Zielfunktion. Die neue Steigung ist  $-4/5$  und damit verläuft diese Gerade wie bisher zwischen den Graden (I) und (II). Der Lösungspunkt ändert sich nicht. Die neue Zielfunktion wird durch die gestrichelte Gerade in der folgenden Abbildung dargestellt.



Nach (17.10.6) ist die Änderung des Optimalwertes  $\Delta z^* = x_1^* \Delta c_1 + x_2^* \Delta c_2 = 80 \cdot 10 + 40 \cdot 10 = 800 + 400 = 1\,200$ .

f) **(Punkte: 2)**

Nehmen Sie an, dass Sie nur  $c_1$  um  $\Delta c_1$  erhöhen. Wie groß darf  $\Delta c_1$  maximal sein, damit die Lösung des primären Problems sich nicht ändert?

Lösung: Wenn wir  $c_1$  erhöhen, ändert sich die Steigung der Zielfunktion. Die Steigung ist  $\frac{30 + \Delta c_1}{40}$  und dies muss  $< 1$  bleiben, d.h.  $\Delta c_1$  muss kleiner 10 sein. Für  $\Delta c_1 = 10$ , fällt die Zielfunktion mit der Geraden (I) zusammen und dann ist zwar  $(80, 40)$  auch noch Lösung, jedoch auch alle Punkte auf der Geraden (I) mit  $80 \leq x_1 \leq 120$ .

g) **(Punkte: 1)**

Erläutern Sie kurz, welche Bedeutung die Zahlen haben, die unterhalb der Lösungen des dualen Problems stehen. Diese Zahlen wurden im Buch mit  $c_{11}, \dots, c_{mm}$  bezeichnet. Wozu werden sie gebraucht?

Lösung: Diese Zahlen werden zur Berechnung der neuen Optimalwerte benötigt, wenn die Konstanten in den Nebenbedingungen geändert werden. Siehe (17.10.3) und (17.10.5).

**Ende der Klausur**